Alef

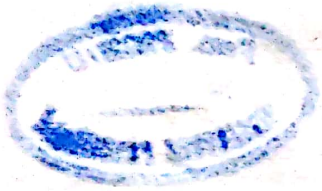
Probleme

Scanned with OKEN Scanner

ALEPH$_0$ / PROBLÈMES

Terminale CE

J. TAILLÉ



L'ensemble **N** des nombres entiers a été étendu à des „nombres" cardinaux transfinis, traditionnellement désignés par la lettre hébraïque aleph diversement indexée.

Aleph-zéro représente ainsi le cardinal de **N** lui-même. Aleph-un est le plus petit cardinal supérieur à Aleph-zéro et ainsi de suite.

CLASSIQUE HACHETTE,
79 BOULEVARD SAINT — GERMAIN, PARIS

Scanned with OKEN Scanner

$ALEF_0$/PROBLEME

J. Taillé

TRADUCERE:

Prof. univ. dr. CONSTANTIN P. POPOVICI

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1975

Scanned with OKEN Scanner

Cuvînt înainte

De la intrarea în vigoare a noilor programe de matematică pentru clasele terminale, îngrijorarea cea mai vizibilă a profesorilor a fost provocată de absența aproape totală a problemelor care să corespundă spiritului acestor programe. Fără îndoială subiectele de bacalaureat vor constitui încetul cu încetul o sursă pe care o vom putea exploata în cursul anului școlar, așa cum se obișnuia în mod curent de curînd. Însă această înlesnire nu va putea fi utilizată decît după un anumit număr de ani.

De aceea m-am adresat profesorilor din Terminalele C și E din Nantes și Caen care au consimțit să-mi trimită o listă de probleme pe care să le compună, individual sau în colectiv; numai problemele de geometrie puteau să prezinte în mod real un interes nou și numai acestea au fost solicitate.

Prezenta culegere conține 30 de probleme care mi-au fost trimise cu această ocazie. Sînt convins că ele respectă scrupulos atît litera cît și spiritul programei și sper că vor face un real serviciu atît profesorilor cît și elevilor care vor dori să găsească un prilej pentru cercetări personale.

O simplă lectură a enunțurilor arată clar că acestea nu au intenția de a fi probleme tip, nici în ce privește lungimea nici în ce privește durata rezolvării sau a redactării: în nici un caz nu sînt probleme de examen care să fie tratate într-un timp limitat.

Dificultatea lor este foarte diferită; chestiunile pe care le abordează permit de a avea o vedere de ansamblu de ceea ce poate fi pretins unui elev al Terminalei C sau al Terminalei E: pentru unele din probleme, profesorii vor preciza cărei din aceste serii se adresează autorul textului.

Țin să mulțumesc profesorilor care și-au impus, pentru a construi aceste probleme, o activitate cîteodată migăloasă, însă în toate cazurile fructuoasă. Și sînt fericit să constat că au știut să nu se mărginească numai la aspectul vectorial: este cu siguranță necesar să fie tratate exercițiile de natură vectorială, dar numai pentru a dobîndi o îndemînare reală în acest domeniu, din care, în consecință, decurge ușor ceea ce este afin; însă ar fi o gafă teribilă să ne reducem la acest angelism și să tăgăduim geometria, în existența și utilizarea acestei discipline atît de formatoare, ce apare chiar în etimologia numelui său. În rest, se știe bine că

Scanned with OKEN Scanner

afinul este interpretarea cea mai imediată şi foarte adesea cea mai clară a vectorialului. Profesorii care au compus prezenta culegere nu au uitat aceasta: ei au făcut, o dată în plus, dovadă de înţelepciune.

C.R.D.P.-ul din Nantes a binevoit de a lua sarcina punerii la punct a acestor texte: astfel din nou am putut constata sprijinul pe care-l dă corpului didactic. Tuturor, de la Directorul său pînă la dactilografe, care nu au avut totdeauna o sarcină prea uşoară, le mulţumim sincer.

Este de la sine înţeles că vor fi primite cu recunoştinţă orice observaţii ale cititorilor referitoare la aceste diverse probleme: greşeli de tipar inevitabile fără îndoială, dar mai ales observaţii asupra naturii, oportunităţii, dificultăţii a uneia sau a alteia dintre probleme. Asemenea observaţii vor fi utile tuturor.

J. Taillé

Inspector Pedagogic Regional de Matematică

Iată lista profesorilor care şi-au oferit serviciile Domnului Taillé pentru realizarea acestei lucrări:

Dra ALANOU	Liceu	Luçon
Dna APERY	Liceu tehnic	Caen
Dl AUXIETTE	Liceu polivalent	La Roche-sur-Yon
Dna BINET	Liceu FRESNEL	Caen
Dra BLANCHET	Liceu polivalent	La Roche-sur-Yon
Dna COJAN	Liceu FRESNEL	Caen
Dl DEGRUYERE	C.P.R.	Nantes
Dl DENNEBOUY	Liceu EMILE MAUPAS	Vire
Dl DROUET	Liceu MEZERAY	Argentan
Dl DUPONT	Liceu MONTESQUIEU	Le Mans
Dl FLEUR	Liceu MARGUERITE DE NAVARRE	Alençon
Dra GAMBILLON	Liceu NAPOLÉON	Laigle
Dl JOUAN	Liceu La Chauvinère	Nantes
Dl LEBAILLEZ	Liceu ALAIN	Alençon
Dra LE TELLIER	Liceu tehnic	Cherbourg
Dl LETERRIER	Liceu MALHERBE	Caen
Dna METAY	Liceu tehnic	Cholet
Dra PRIEUR	Liceu de Stat	Saumur
Dl RENARD	Liceu de Stat	Saumur
Dl RENAUDIN	Liceu CLEMENCEAU	Nantes
Dl SEROUX	Liceu tehnic	Rezé
Dl SORTAIS	Liceu MONTESQUIEU	Le Mans
Dra VENARD	Liceu J. du BELLAY	Angers

Ediţia originală a prezentei culegeri a fost realizată de Centrul Regional de Documentaţie Pedagogică din Nantes în seria *Documente Experimentale de Matematică.*

Scanned with OKEN Scanner

1

SPAȚIU VECTORIAL AL NUMERELOR COMPLEXE

Vezi colecția Alef$_0$:
Algebră / Numere reale, calcul numeric, numere complexe
Capitolul 2
Capitolul 3, secțiunile 1 și 2

Se notează cu i numărul complex de modul 1 și de argument $\frac{\pi}{2}$, cu j numărul complex de modul 1 și de argument $\frac{2\pi}{3}$. Se reamintește că $\mathfrak{B} = (1, i)$ este o bază a lui **C**, mulțimea numerelor complexe, care este un spațiu vectorial peste **R**.

1° Să se demonstreze:

$$1 + j + j^2 = 0 \text{ și } j^2 = \bar{j},$$

unde $\bar{j}$ reprezintă conjugatul lui j.

2° Să se demonstreze că:

$$\mathfrak{B}' = (1, j) \text{ este o bază a lui } \mathbf{C}.$$

Să se scrie numărul complex $z = x + iy$ (x și y numere reale) sub forma $z = a + bj$ (a și b numere reale).

Să se deducă matricele P și P^{-1} definite prin:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Care sînt componentele numărului complex i în baza $\mathfrak{B}'$?

3° Să se calculeze pătratul modulului numărului complex $z = a + bj$ în funcție de a și b. Să se determine în baza $\mathfrak{B}'$ componentele următoarelor numere complexe:

a) conjugatul $\bar{z}$ al numărului complex $z = a + bj$;

b) inversul $\frac{1}{z}$ al numărului complex z presupus nenul;

c) produsele jz și j^2z;

d) produsul numerelor complexe $z = a + bj$ și $z' = a' + b'j$.

Scanned with OKEN Scanner

4° Să se demonstreze că aplicația f a lui $\mathbf{C}$ în $\mathbf{C}$, care asociază numărului complex z conjugatul său $\bar{z}$ este un automorfism involutiv al lui $\mathbf{C}$. Să se scrie matricele A și A' asociate acestui automorfism în baza $\mathscr{B}$ respectiv în baza $\mathscr{B}'$.

5° Fiecărui număr complex $z = a + b\mathrm{j}$ (a și b numere reale) i se asociază matricea $M(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{bmatrix}$.

a) Pentru ce numere complexe $z = a + b\mathrm{j}$ matricea $M(z)$ este inversabilă?

b) Să se calculeze suma și produsul matricelor $M(z)$ și $M(z')$ asociate numerelor complexe z și z'. Să se compare matricele obținute cu matricele $M(z + z')$ respectiv $M(zz')$. Ce concluzie se poate trage?

Scanned with OKEN Scanner

2

SPAȚIU VECTORIAL AL POLINOAMELOR

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 2, secțiunile 1 și 3

Fie $\mathfrak{A}$ mulțimea formată din polinomul nul și din polinoamele (cu coeficienți reali) al căror grad este cel mult egal cu 2. Se reamintește că adunarea în $\mathfrak{A}$ și înmulțirea cu un număr real a elementelor din $\mathfrak{A}$ conferă acestei mulțimi structura de spațiu vectorial peste corpul numerelor reale.

Dacă P este un element din $\mathfrak{A}$, se notează cu P' polinomul derivat al lui P.

1° Să se demonstreze că (A, B, C) și (U, V, W) sînt baze ale lui $\mathfrak{A}$ atunci cînd se ia:

$$A(x) = x^2; \qquad B(x) = x; \qquad C(x) = 1;$$

$$U(x) = x^2 + x + 1; \qquad V(x) = x - 1; \qquad W(x) = x + 1.$$

2° Fie f aplicația lui $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{A}$ definită prin $f(P) = Q$ în care

$$Q(x) = P(x) + (ax + b)P'(x),$$

unde a și b sînt două numere reale date.

a) Este f un endomorfism al lui $\mathfrak{A}$?

b) Este f un automorfism al lui $\mathfrak{A}$?

3° Să se determine nucleul și imaginea directă a lui f.

4° Să se determine P, nenul, astfel încît P și $f(P) = Q$ să fie liniar dependente.

Scanned with OKEN Scanner

3

SPAȚIU VECTORIAL AL ȘIRURILOR NUMERICE

Vezi colecția Alef$_0$:
Algebră / Numere întregi
Capitolul 1, secțiunea 4
Analiză I / Calcul diferențial, aplicații
Capitolul 1, secțiunea 3

În punctele următoare, n este un număr natural dat, iar a, b și c sînt trei numere reale date cu $ac \neq 0$. Indicele m este un număr natural care ia o valoare oarecare din segmentul $[0, n]$ inclus în N.

Se consideră mulțimea S a șirurilor (u_n) ai căror termeni $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sînt $(n+1)$ numere reale ce verifică, pentru $2 \leqslant m \leqslant n$, relația de recurență:

$$au_m + bu_{m-1} + cu_{m-2} = 0. \tag{1}$$

Un șir (u_n) din S este deci determinat prin indicarea primilor doi termeni (u_0 și u_1) și a numărului $n+1$ de termeni ai săi; în particular, șirul constant nul (ω_n) este elementul din S care corespunde la:

$$\omega_0 = \omega_1 = 0.$$

(u_n) și (v_n) fiind șiruri din S cu termenii generali respectiv u_m și v_m, șirul cu termenul general $u_m + v_m$ va fi notat cu $(u_n + v_n)$ și, dacă λ este un număr real, șirul cu termenul general λu_m va fi notat cu (λu_n).

1° Să se demonstreze că S este un spațiu vectorial peste $\mathbf{R}$.

2° Se notează cu: (i_n) șirul din S definit prin:

$$i_0 = 1 \text{ și } i_1 = 0,$$

(j_n) șirul din S definit prin:

$$j_0 = 0 \text{ și } j_1 = 1.$$

Să se demonstreze că $\{(i_n), (j_n)\}$ este o bază a spațiului vectorial S; să se deducă dimensiunea lui S.

3° a) r fiind un număr real nenul, să se demonstreze că progresia geometrică formată din $n+1$ termeni, notată cu (r_n), definită prin $r_0 = 1$ și $r_1 = r$, este element din S dacă și numai dacă r este soluția lui:

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

b) Dacă ecuația (2) are două rădăcini reale distincte r' și r'', se consideră două progresii geometrice (r'_n) și (r''_n) formate din cîte $n+1$ termeni definite respectiv prin:

$$(r'_0 = 1,\ r'_1 = r') \text{ și } (r''_0 = 1,\ r''_1 = r'').$$

Să se demonstreze că $\{(r'_n), (r''_n)\}$ este o bază a lui S.

Scanned with OKEN Scanner

Să se deducă că orice element (u_n) din S este de forma:

$$(u_n) = A(r'_n) + B(r''_n).$$

Să se calculeze numerele reale A și B în funcție de r', r'', u_0 și u_1.

Se dau $a = 10$, $b = -101$, $c = 10$, $u_0 = 13$, $u_1 = 31$: să se calculeze, numai în funcție de m, termenul general u_m al șirului (u_n).

c) Dacă ecuația (2) are o soluție dublă r, se consideră progresia geometrică (r_n) formată din $n + 1$ termeni al cărei termen general este r^m și șirul (nr_n) format din $n + 1$ termeni al cărui termen general este mr^m.

Să se demonstreze că $\{(r_n), (nr_n)\}$ este o bază a lui S.

Aplicație: să se calculeze u_m numai în funcție de m pentru:

$$a = c = 1,\ b = -4,\ u_0 = 2 \text{ și } u_1 = 8.$$

Scanned with OKEN Scanner

4

MATRICE ŞI NUMERE COMPLEXE

Vezi colecţia Alef$_0$:
Algebră | Numere reale, calcul numeric, numere complexe
Capitolul 2, secţiunile 1 şi 2

Se notează cu $\mathfrak{M}$ mulţimea matricelor pătrate de ordinul 2, cu elemente numere reale, înzestrată cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi cu înmulţirea matricelor cu un număr real. Se reaminteşte că $\mathfrak{M}$ este atît un spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ cît şi un inel.

Fie $\mathfrak{S}$ mulţimea matricelor de forma $M(a, b) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$, unde a şi b sînt numere reale.

1° Să se demonstreze că $\mathfrak{S}$ este un subinel al lui $\mathfrak{M}$. Să se demonstreze că $\mathfrak{S}$ este un spaţiu vectorial al lui $\mathfrak{M}$; să se determine o bază a lui $\mathfrak{S}$; să se determine dimensiunea lui $\mathfrak{S}$.

2° Să se demonstreze că aplicaţia f a lui $\mathbf{C}$, corpul numerelor complexe, în $\mathfrak{S}$, definită pentru orice element $a + ib$ din $\mathbf{C}$ prin:

$$f(a + ib) = M(a, b)$$

este un izomorfism de grupuri aditive.

3° Se defineşte pe $\mathbf{C}$ o lege nouă de compoziţie, notată cu $*$, punînd:

$$z * z' = f^{-1}[f(z) \times f(z')]$$

pentru orice pereche (z, z') de elemente din $\mathbf{C}$; f^{-1} reprezintă bijecţia inversă bijecţiei f definite la punctul doi.

a) Să se calculeze $(a + ib) * (a' + ib')$ în care $(a, b, a', b') \in \mathbf{R}^4$.

b) Să se demonstreze că legea notată cu $*$ este asociativă, comutativă şi distributivă în raport cu adunarea din $\mathbf{C}$.

c) Să se determine elementul neutru şi elementele simetrice în raport cu legea internă notată cu $*$.

Care este structura lui $\mathbf{C}$ înzestrată cu adunarea numerelor complexe şi cu legea notată cu $*$?

Scanned with OKEN Scanner

5
PLAN VECTORIAL

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / Elemente de geometrie afină și euclidiană
Capitolul 5, secțiunea 2

$\mathbf{R}^2$ este raportat la o bază ortonormată directă $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$; $\vec{u}$ și $\vec{v}$ fiind doi vectori din R^2, se notează cu $\vec{u} \cdot \vec{v}$ produsul lor scalar.

1° Se consideră endomorfismul f al lui $\mathbf{R}^2$ a cărui matrice asociată, în baza $\mathcal{B}$, este: $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Să se demonstreze că produsele scalare $\vec{v} \cdot f(\vec{u})$ și $\vec{u} \cdot f(\vec{v})$ sînt egale, oricare ar fi vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ din R^2.

2° Se notează cu T rotația vectorială de $\frac{\pi}{4}$, cu H omotetia vectorială de raport k nenul, cu D simetria vectorială în raport cu dreapta vectorială generată de $\vec{e}_1$. Fie $\vec{u} = (x, y)$. Să se calculeze componentele lui $T(\vec{u})$, $H(\vec{u})$, $D(\vec{u})$ în funcție de x și y. Se pune: $S = H \circ T \circ D$. Să se calculeze componentele lui $S(\vec{u})$ în funcție de x și y.

3° Să se demonstreze că $S(\vec{e}_1)$ și $S(\vec{e}_2)$ sînt ortogonale. Să se calculeze numerele reale pozitive a și b astfel încît $\{aS(\vec{e}_1), bS(\vec{e}_2)\}$ să fie o bază ortonormată; care este sensul acestei baze?

4° Să se verifice că aplicația S este un endomorfism al lui $\mathbf{R}^2$.

5° Un vector $\vec{U}$ din $\mathbf{R}^2$ fiind dat, să se demonstreze că există un vector unic, $\vec{U}'$, care satisface:

$$\vec{U} \cdot S(\vec{v}) = \vec{U}' \cdot \vec{v},$$

pentru orice vector $\vec{v}$ din $\mathbf{R}^2$.

Să se demonstreze că funcția P, care asociază vectorului $\vec{U}$ vectorul $\vec{U}'$, este liniară.

Scanned with OKEN Scanner

6

MATRICE ŞI IZOMORFISME

Vezi colecţia Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 2, secţiunile 1 şi 3

Se notează cu I matricea $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ şi cu V matricea $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; se consideră apoi mulţimea F a matricelor A de forma $aI + bV$, unde a şi b sînt numere reale arbitrare.

1° a) Să se calculeze pătratul matricei V.

b) Să se demonstreze că două elemente $A = aI + bV$ şi $A' = a'I + b'V$ din mulţimea F sînt egale dacă şi numai dacă $a - a'$ şi $b - b'$ sînt amîndouă nule.

c) Să se demonstreze că mulţimea F are o structură de spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ în raport cu adunarea matricelor şi înmulţirea lor cu un număr real. Care este dimensiunea sa?

d) Să se demonstreze că mulţimea F are structura unui inel unitar; are F structura unui corp?

2° Se consideră un spaţiu vectorial euclidian E peste $\mathbf{R}$, de dimensiune 2, şi se ia o bază ortonormată directă $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ a acestui spaţiu. Se consideră aplicaţiile liniare f ale lui E în el însuşi definite, relativ la baza $\mathfrak{B}$, prin matricele A din F.

a) În ce condiţii aplicaţia f definită prin matricea A este un izomorfism?

b) Care este nucleul aplicaţiei v asociate matricei V în baza $\mathfrak{B}$?

c) Care este imaginea directă a lui E, prin aplicaţia v? Să se compare dimensiunile lui E, imaginii directe şi ale nucleului lui v.

d) Se efectuează o schimbare de bază definită prin:

$$\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1).$$

Se notează cu $\mathfrak{B}'$ baza $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Fie $\vec{u}$ un vector din E ale cărui componente sînt (α, β) în baza $\mathfrak{B}'$. Să se exprime componentele vectorului $v(\vec{u})$ în baza $\mathfrak{B}'$ în funcţie de α şi β.

Scanned with OKEN Scanner

e) Să se deducă o intrepretare geometrică a lui v sub formă de compunere de transformări geometrice simple.

f) Să se determine matricea care reprezintă pe f relativ la baza $\mathscr{B}'$.

3° Se consideră aplicaţia C a lui F în el însuşi, care face să corespundă matricei $A = aI + bV$ matricea $C(A) = aI - bV$.

Să se demonstreze că C este un automorfism involutiv al spaţiului vectorial F şi că se poate scrie:

$$C(A \times A') = C(A) \times C(A')$$

dacă A şi A' sînt două elemente oarecare din F.

4° $A = aI + bV$ fiind un element oarecare din F, să se demonstreze prin recurenţă:

$$A^n = a^nI + na^{n-1}bV.$$

Scanned with OKEN Scanner

7

MATRICE. ENDOMORFISME ALE PLANULUI VECTORIAL

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 2, secțiunea 1

Se consideră mulțimea S a matricelor M de forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ unde a și b sînt numere reale.

1° Să se demonstreze că $(S, +, \times)$ este un inel, comutativ și unitar.

2° Să se demonstreze că S, înzestrată cu adunarea și cu produsul printr-un scalar real, este un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale. Să se indice o bază a acestui spațiu vectorial; să se deducă dimensiunea lui S.

3° În ce condiții se poate defini o matrice M^{-1}, inversa lui M? Cînd aceasta este posibil, să se scrie M^{-1}.

4° Matricea M este asociată unui endomorfism f al unui plan vectorial P raportat la o bază $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Să se determine nucleul lui f în funcție de valorile lui a și b.

5° Să se demonstreze că, pentru două valori ale lui k ce vor fi precizate în funcție de a și b, există vectori v din P, diferiți de vectorul nul, care verifică $f(\vec{v}) = k\vec{v}$. Să se precizeze, în fiecare caz, mulțimea acestor vectori.

6° Fie $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ și $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$; să se scrie matricea asociată endomorfismului f în baza $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

7° Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ din S și se notează cu g endomorfismul planului vectorial P asociat lui A în baza $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Să se determine mulțimea vectorilor invarianți prin g. Să se interpreteze geometric g.

8° Să se interpreteze geometric endomorfismul h a cărui matrice asociată în baza $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ este $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

8

MATRICE ȘI PRODUSE SCALARE

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 8

Fie P un plan vectorial euclidian raportat la o bază ortonormată $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Se notează cu $\mathcal{S}$ mulțimea matricelor S de forma $S = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ și cu $\mathcal{T}$ mulțimea matricelor T de forma $T = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ în care a și b reprezintă două numere reale nenule. Fie f și g două endomorfisme din P ale căror matrice asociate, în baza $\mathcal{B}$, sînt respectiv S și T.

1° Să se demonstreze: $f \circ g = g \circ f$.

2° $\vec{u} \cdot \vec{v}$ reprezentînd produsul scalar a doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ oarecare din P, să se demonstreze: $g(\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot g(\vec{v})$.

3° Să se demonstreze: $f(\vec{u}) \cdot g(\vec{v}) = -g(\vec{u}) \cdot f(\vec{v})$.

Să se deducă că vectorii $f(\vec{u})$ și $g(\vec{u})$ sînt ortogonali oricare ar fi vectorul $\vec{u}$ din P. Să se interpreteze geometric f și g.

4° Să se demonstreze că $s = f + g$ și $d = f - g$ sînt două automorfisme din P. Să se verifice: $||s(\vec{u})|| = ||d(\vec{u})||$.

5° Se ia $h = s \circ d^{-1}$. Să se demonstreze că h este o izometrie vectorială.

6° Se ia: $\begin{cases} \vec{u}_1 = s(\vec{e}_1) \\ \vec{u}_2 = d(\vec{e}_2). \end{cases}$

Să se demonstreze că matricea asociată lui f în baza $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ este tot matricea S.

9

MATRICE ŞI PRODUSE SCALARE

Vezi colecţia Alef$_0$:
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 8

Fie $\mathfrak{M}$ spaţiul vectorial al matricelor pătrate de ordinul 2 cu elemente numere reale.

1° Se consideră aplicaţia t care fiecărei matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ din $\mathfrak{M}$ asociază matricea numită „transpusa" lui A, notată cu $\tilde{A}$ şi definită prin $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Să se demonstreze că t este un automorfism involutiv al spaţiului vectorial $\mathfrak{M}$.

2° Se consideră aplicaţia f, a lui $\mathfrak{M}$ în el însuşi, definită prin: $f(A) = A + \tilde{A}$.

a) Să se demonstreze că f este o aplicaţie liniară.

b) Să se determine nucleul lui f.

c) Care este imaginea directă a lui $\mathfrak{M}$ prin f?

3° În toate punctele care urmează, planul vectorial $\mathbf{R}^2$ fiind raportat la baza sa canonică $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ cu $\vec{e}_1 = (1, 0)$ şi $\vec{e}_2 = (0, 1)$, matricea $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ este asociată unei aplicaţii liniare f a lui $\mathbf{R}^2$ în el însuşi. Se notează cu g aplicaţia liniară asociată lui $\tilde{A}$ în baza $\mathfrak{B}$. Să se demonstreze că produsele scalare $[f(\vec{V}_1)] \cdot \vec{V}_2$ şi $[g(\vec{V}_2)] \cdot \vec{V}_1$ sînt egale oricare ar fi vectorii $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ din $\mathbf{R}^2$.

4° Se consideră submulţimea $\mathfrak{E}$ a lui $\mathfrak{M}$ formată din matricele A care verifică $A \times \tilde{A} = \tilde{A} \times A$. Să se determine matricele care satisfac această condiţie. Să se demonstreze apoi că $f(\vec{V})$ şi $g(\vec{V})$ au norme egale oricare ar fi vectorul $\vec{V}$ din $\mathbf{R}^2$.

5° Să se demonstreze că, într-un spaţiu euclidian, proprietatea $||\vec{V}|| = ||\vec{V}'||$ atrage ortogonalitatea lui $(\vec{V} + \vec{V}')$ cu $(\vec{V} - \vec{V}')$, aplicaţie la punctul precedent.

Scanned with OKEN Scanner

10
PROIECTORI

Vezi colecția Alef_0:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 2, secțiunea 4

E este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale. Se numește proiector al lui E orice endomorfism p al lui E care verifică:

$$p \circ p = p.$$

Se notează cu e identitatea din E ($\vec{u} \in E$, $\forall \vec{u} : e(\vec{u}) = \vec{u}$).

1° Să se verifice că e este un proiector al lui E.

2° Să se demonstreze că p este un proiector al lui E dacă și numai dacă și $g = e - p$ este un proiector al lui E.

3° $N(f)$ și $f(E)$ reprezintă respectiv nucleul endomorfismului f al lui E și mulțimea imaginilor prin f ale elementelor din E.

a) Să se compare $N(g)$ și $p(E)$.

b) Ce se poate spune atunci despre $N(p)$ și $g(E)$?

c) Să se demonstreze că E este suma directă a lui $N(p)$ și $p(E)$.

4° Se presupune, la acest punct, că E este un plan vectorial peste $\mathbf{R}$ raportat la o bază $\mathfrak{B}$.

a) Să se determine, în baza $\mathfrak{B}$, matricea unui proiector oarecare p al lui E: să se arate că putem face să apară 5 tipuri de proiectori ai lui E.

b) Se notează cu f_1, f_2, f_3, f_4 endomorfismele lui E ale căror matrice în baza $\mathfrak{B}$ sînt respectiv:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Care dintre aceste endomorfisme sînt proiectori ai lui E?

Să se demonstreze că sistemul f_1, f_2, f_3, f_4 este o bază a lui $\mathfrak{L}(E)$; să se deducă dimensiunea lui $\mathfrak{L}(E)$.

5° Dacă E este de dimensiune 3, să se demonstreze că orice proiector surjectiv al lui E este e; ce se poate spune despre un proiector injectiv al lui E?

Scanned with OKEN Scanner

11
PROIECTORI

Vezi colecţia Alef_0:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 2, secţiunea 4

I. E este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

1° Fie p un endomorfism al lui E şi e endomorfismul identic al lui E. Se notează cu f endomorfismul definit prin $f = 2p - e$.

Să se demonstreze că f este un automorfism involutiv al lui E dacă şi numai dacă p este un proiector (adică dacă p verifică $p \circ p = p$).

2° Presupunînd că p este un proiector, să se demonstreze că mulţimea F a vectorilor invarianţi prin f este identică cu mulţimea vectorilor invarianţi prin p şi că are loc $F = \text{Im}\, p$.

Să se demonstreze că mulţimea G a vectorilor $\vec{u}$ din E care verifică $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ este identică cu nucleul N_p al lui p. Să se deducă că $\text{Im}\, p$ şi N_p sînt două subspaţii suplementare.

II. În acest punct se presupune că spaţiul vectorial E este de dimensiune 3; el este raportat la baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se dau vectorii:

$$\vec{I}(-1, 2, 1)\,; \quad \vec{J}(1, -1, 0)\,; \quad \vec{K}(0, 1, -1).$$

Să se demonstreze că $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ este o bază a lui E.

Se notează cu p proiecţia vectorială pe planul vectorial P generat de $(\vec{J}, \vec{K})$ de-a lungul direcţiei dreptei vectoriale D generate de $\vec{I}$. $\vec{u}$ fiind un vector oarecare al lui E, de componente (x, y, z) pe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ şi (X, Y, Z) pe $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, se notează cu (x', y', z') şi (X', Y', Z') componentele lui $p(\vec{u})$ respectiv pe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ şi $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

1° Să se exprime (X', Y', Z') în funcţie de (X, Y, Z) şi să se verifice că p este un proiector.

Să se exprime (x, y, z) în funcţie de (X, Y, Z) apoi (X, Y, Z) în funcţie de (x, y, z); să se deducă (x', y', z') în funcţie de (x, y, z).

2° s reprezentînd simetria vectorială a lui E în raport cu planul vectorial P de-a lungul dreptei vectoriale D, să se exprime componentele (x_1, y_1, z_1) ale lui $s(\vec{u})$ pe baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ în funcţie de (x, y, z).

III. În acest punct se presupune că spaţiul vectorial E este de dimensiune 2. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i}', \vec{j}')$ două baze ale lui E; f_0 este endomorfismul nul al lui E şi f este un endomorfism al lui E de matrice $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ pe baza $(\vec{i}, \vec{j})$ şi de matrice $M' = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ pe baza $(\vec{i}', \vec{j}')$.

Scanned with OKEN Scanner

Se pune $t = a + d$, $t' = a' + d'$, $\delta = ad - bc$, $\delta' = a'd' - b'c'$ (t și t' sînt urmele matricelor M și M', δ și δ' sînt determinanții lor).

1° I și 0 fiind matricele lui e și f_0 să se demonstreze:

$$M^2 - tM + \delta I = 0 \text{ și } M'^2 - t'M' + \delta' I = 0.$$

Să se deducă:

$$f \circ f - tf + \delta e = f_0 \text{ și } f \circ f - t'f + \delta' e = f_0.$$

2° Dacă se presupune că există un număr real λ astfel încît f să fie λe, să se demonstreze $M = M'$; să se deducă

$$t = t' \text{ și } \delta = \delta'.$$

Să se enunțe rezultatele obținute.

3° $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt doi vectori liniar independenți și f este simetria vectorială în raport cu dreapta vectorială D dirijată de $\vec{u}$ de-a lungul direcției dreptei vectoriale D' dirijate de $\vec{v}$.

Să se caracterizeze p știind că f este $f = 2p - e$.

Să se determine matricele lui f și p pe baza $(\vec{u}, \vec{v})$.

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ fiind matricea lui f pe baza $(\vec{i}, \vec{j})$, care sînt valorile lui t și δ?

Să se determine b, c, d știind că a este egal cu 3 și că vectorul $\vec{v}$ are drept componente pe $(-1, 1)$ pe $(\vec{i}, \vec{j})$. Să se determine atît componentele unui vector al lui D, cît și matricea lui p pe baza $(\vec{i}, \vec{j})$.

Scanned with OKEN Scanner

12

ENDOMORFISME ALE LUI $\mathcal{E}_3$

Vezi colecția Alef$_0$.
Geometrie vol. I / Elemente de geometrie afină și euclidiană
Capitolul 2, secțiunea 2

Fie un spațiu vectorial $\mathcal{E}$ de dimensiune 3 raportat la baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se consideră endomorfismul $f_{a,b,c}$ al lui $\mathcal{E}$ care face să corespundă fiecărui vector $\vec{v}(x, y, z)$ vectorul $\vec{v}(x', y', z')$ definit prin:

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = cx + ay + bz \\ z' = bx + cy + az \end{cases} \quad (a, b, c: \text{numere reale})$$

$\mathfrak{P}$ este planul vectorial avînd ca ecuație pe $x + y + z = 0$.
$\mathfrak{D}$ este dreapta vectorială avînd ca bază pe $\vec{u}(1, 1, 1)$.

1° Cum trebuie să alegem (a, b, c) pentru ca $f(\vec{i})$ și $f(\vec{j})$ să fie liniar dependente?

Să se demonstreze că $\{f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})\}$ este o familie legată dacă și numai dacă:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \text{ este nul.}$$

Să se demonstreze că expresia $a^2 - a(b + c) + b^2 + c^2 - bc$ este pozitivă sau nulă oricare ar fi tripletul (a, b, c) și că este nulă numai în cazul cînd a, b, c sînt egale.

2° Să se deducă $f(\mathcal{E})$ în funcție de valorile lui (a, b, c).

Să se determine nucleul lui f.

În ce caz f este bijectiv? În acest caz, să se demonstreze că planul vectorial $\mathfrak{P}$ și dreapta vectorială $\mathfrak{D}$ sînt invariante global prin f.

3° Cum trebuie să alegem (a, b, c) pentru ca restricția lui f la $\mathfrak{D}$ să fie identitate, sau omotetie vectorială de raport -1?

Cum trebuie să alegem (a, b, c) pentru ca restricția lui f la $\mathfrak{P}$ să fie identitate, sau omotetie vectorială de raport -1? (s-ar putea utiliza vectori simpli care definesc pe $\mathfrak{P}$).

4° Să se identifice endomorfismele care corespund la $(a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ și la $(a, b, c) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

5° Să se determine toate tripletele (a, b, c) astfel încît $f_{a,b,c}$ să fie involutiv. Să se identifice endomorfismele corespondente și să se demonstreze că mulțimea lor înzestrată cu legea $\circ$ este un grup comutativ.

6° În acest punct se consideră că $\mathcal{E}$ este euclidian și că baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este ortonormată.

Să se demonstreze că $f_{a,b,c}$ este o transformare ortogonală dacă și numai dacă sînt verificate ambele condiții:

$$\begin{cases} |a+b+c| = 1 \\ ab+bc+ca = 0. \end{cases}$$

Să se demonstreze că mulțimea $\{f_{(1,0,0)}, f_{(0,0,1)}, f_{(0,1,0)}\}$ înzestrată cu legea $\circ$, este un grup comutativ; să se identifice transformările $f_{(0,0,1)}$ și $f_{(0,1,0)}$.

13

ENDOMORFISME ALE LUI E_3

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / Elemente de geometrie afină și euclidiană
Capitolul 2, secțiunile 2 și 3

Fie E un spațiu vectorial de dimensiune 3 peste $\mathbf{R}$.

Scopul problemei este de a studia endomorfismele f și g ale lui E care verifică:

$$f \circ g - g \circ f = e, \tag{1}$$

unde e este aplicația identică a lui E.

Se numește „polinom de gradul n peste $\mathbf{R}$" orice aplicație P a lui E în E definită prin:

$$P(g) = \sum_{i=0}^{n} a_i g^i,$$

în care a_i sînt luate din $\mathbf{R}$ și g^i este definit prin $g^i = g^{i-1} \circ g$ ($g^0 = e$, $g^1 = g$). Se numește „polinomul derivat al lui P" aplicația P' a lui E în E definită prin:

$$P'(g) = \sum_{i=1}^{n} i a_i g^{i-1}.$$

1° Fie f și g două endomorfisme care verifică relația (1). Să se demonstreze:

$$f \circ g^2 - g^2 \circ f = 2g,$$

și:
$$f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}.$$

Să se deducă o a doua relație:

$$\forall P \quad f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g). \tag{2}$$

2° Să se demonstreze că, dimensiunea lui E fiind 3, $\mathfrak{L}(E)$ este un spațiu vectorial peste $\mathbf{R}$ de dimensiune 9.

3° Observînd că $e, g, g^2, \ldots, g^9$ formează un sistem legat al lui $\mathfrak{L}(E)$, să se deducă că există un polinom Q, neconstant și care verifică $Q(g) = 0$, unde 0, este aplicația nulă a lui E. Utilizînd relația (2), să se demonstreze că există un șir de polinoame K, neconstante și care verifică $K(g) = 0$.

Să se deducă $g = ke$.

În fine, să se demonstreze că relația (1) nu se verifică pentru $g = ke$.

Ce concluzie trebuie să tragem din acest studiu?

Scanned with OKEN Scanner

14

ENDOMORFISME ȘI AUTOMORFISME

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 2, secțiunile 2 și 3

E este un spațiu vectorial de dimensiune 3. Obiectul problemei este de a determina mulțimea $\mathcal{H}$ a aplicațiilor f ale lui E în E care permută cu toate endomorfismele lui E. În părțile I și II nu se presupune că f este liniară: singura ipoteză este deci că pentru orice endomorfism g al lui E se poate scrie:

$$f \circ g = g \circ f.$$

I. 1° Să se demonstreze că $\mathcal{H}$ este un subspațiu al spațiului vectorial al aplicațiilor lui E în E.

2° Dacă $\vec{x}$ este un vector nenul al lui E și dacă P este un plan care nu conține pe $\vec{x}$, să se demonstreze că orice vector $\vec{y}$ al lui E se descompune sub forma:

$$\vec{y} = \lambda\vec{x} + \vec{u} \text{ (cu } \lambda \in \mathbf{R} \text{ și } \vec{u} \in P),$$

și că această descompunere este unică.

Fie $\varphi_{\vec{x}}$ aplicația lui E în E definită prin:

$$\vec{y} \mapsto \lambda\vec{x}.$$

Să se verifice că $\varphi_{\vec{x}}$ este un endomorfism.

3° Să se demonstreze că dacă f aparține lui $\mathcal{H}$ și dacă $\vec{x}$ este un vector nenul al lui E, $f(\vec{x})$ este invariant prin $\varphi_{\vec{x}}$.

Să se deducă că $f(\vec{x})$ este proporțional cu $\vec{x}$ oricare ar fi $\vec{x}$ în E, adică

$$\forall\vec{x},\ \exists\mu_{\vec{x}}\ \ f(\vec{x}) = \mu_{\vec{x}}\vec{x}.$$

(Să nu se uite să fie tratat cazul în care $\vec{x}$ este nul).

4° Să se demonstreze că există un endomorfism g care verifică:

$$g(\vec{x}) = \vec{y}$$

oricare ar fi vectorii $\vec{x}$ și $\vec{y}$ nenuli din E.

Să se deducă:

$$\mu_{\vec{x}} = \mu_{\vec{y}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ce concluzie putem să tragem în legătură cu $\mathcal{K}$? Să se regăsească în felul acesta rezultatul din primul punct.

II. În această parte, se presupune numai că f permută cu automorfismele din E. Modificînd convenabil al doilea punct (să se înlocuiască $\varphi_{\vec{x}}$ prin $\psi_{\vec{x}} : \vec{y} \mapsto \lambda\vec{x} + 2\vec{u}$) și al treilea punct din I, să se arate că concluzia din prima parte rămîne valabilă și că, în consecință, o aplicație care permută cu automorfismele permută de asemenea și cu orice endomorfism.

Să se regăsească acest rezultat direct, arătînd că orice endomorfism g este suma a două automorfisme (s-ar putea utiliza faptul că g este caracterizat prin restricțiile sale în raport cu nucleul său și un suplementar al nucleului său).

III. Dacă se presupune dinainte că f este liniară, problema are o transcriere în limbaj de matrice. Să se enunțe rezultatele fundamentale care se pot obține astfel plecînd de la cele stabilite în părțile I și II. Să se demonstreze din nou primul din aceste rezultate cu ajutorul matricelor: pentru aceasta va fi suficient de a utiliza succesiv matricele aplicațiilor $\varphi_{\vec{i}}$, $\varphi_{\vec{j}}$, $\varphi_{\vec{k}}$ în care $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este o bază a lui E, apoi matricea endomorfismului care efectuează o substituție circulară asupra vectorilor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Scanned with OKEN Scanner

15

AUTOMORFISME ALE PLANULUI AFIN

Vezi colecţia Alef$_0$:
Geometrie vol. I/ Elemente de geometrie afină şi euclidiană
Capitolul 3

Fie φ o transformare afină (sau aplicaţia afină bijectivă) a planului afin $\mathfrak{P}$, τ mulţimea punctelor din $\mathfrak{P}$ invariante prin φ.

I. Să se demonstreze cu ajutorul noţiunii de baricentru că:
sau τ este mulţimea vidă,
sau τ conţine un punct A şi numai unul,
sau τ este o dreaptă $\mathfrak{D}$,
sau τ este planul $\mathfrak{P}$.

II. Planul afin $\mathfrak{P}$ este raportat la un reper $(0, \vec{i}, \vec{j})$ şi transformarea φ este definită analitic prin:

$$\varphi: \begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = cx + dy + \beta \end{cases} \text{ cu } ad - bc \neq 0.$$

1° Să se determine analitic mulţimea τ discutînd după valorile parametrilor $a, b, c, d, \alpha, \beta$ şi să se regăsească astfel cele patru posibilităţi de la punctul I.

Care sînt transformările afine astfel încît τ să fie vidă?

În ce condiţii punctul O este sigurul punct invariant?

2° Se consideră următorul caz particular:

$$\varphi: \begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = \lambda(a - 1)x + (1 + \lambda b)y + \lambda\alpha. \end{cases}$$

Să se verifice în acest caz că τ este o dreaptă $\mathfrak{D}$ şi să se determine ecuaţia lui $\mathfrak{D}$. Fie $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un punct din $\mathfrak{P}$ şi $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ imaginea sa prin φ; să se demonstreze că dreapta (MM') aparţine unei direcţii fixe δ.

Două cazuri sînt posibile:

a) δ este paralelă cu $\mathfrak{D}$; să se determine relaţia caracteristică care leagă a, b şi λ.

b) δ nu este paralelă cu $\mathfrak{D}$; dreapta MM' intersectează $\mathfrak{D}$ în m; să se demonstreze că există o constantă reală k care permite să scriem:

$$\overrightarrow{mM'} = k\overrightarrow{mM}.$$

3° Aici se studiază două exemple care corespund fiecăruia din cele două cazuri considerate în problema precedentă:

a) $\varphi: \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd determinate $\mathfrak{D}$ şi δ apoi imaginea M' a punctului particular $M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ să se indice o construcţie a imaginii P' a unui punct oarecare P din plan.

b) $\varphi: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -2x + 3y + 2. \end{cases}$

Avînd determinate $\mathfrak{D}$ şi δ apoi imaginea M' a punctului particular $M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ să se indice o construcţie a imaginii P' a unui punct oarecare P din plan. Care este aici valoarea numărului λ definit prin $\overrightarrow{mM'} = \lambda \overrightarrow{mM}$, m fiind intersecţia dreptelor MM' şi $\mathfrak{D}$?

Scanned with OKEN Scanner

16
PLAN AFIN

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 4

1° Se consideră în planul vectorial P raportat la baza $(\vec{i}, \vec{j})$ aplicația liniară f a cărei matrice în această bază este:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Să se determine componentele (x', y') ale vectorului $\vec{V}' = f(\vec{V})$ în funcție de componentele (x, y) ale lui $\vec{V}$.

b) Este f bijectivă? Este f involutivă?

c) Să se demonstreze că f lasă invariante global două drepte vectoriale pe care să le determinăm.

2° Acum se consideră în planul afin $\mathcal{P}$ aplicația g care asociază fiecărui punct M de coordonate (x, y) în reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ punctul $M'(x', y')$ definit prin:

$$\begin{cases} x' = 5x - 4y \\ y' = 4x - 5y + 4. \end{cases}$$

a) Să se demonstreze că g este o aplicație afină pentru care se vor determina elementele caracteristice (notăm cu A punctul său invariant).

b) Să se demonstreze că g lasă invariante global două drepte afine de vectori directori $\vec{e}_1(2, 1)$ și $\vec{e}_2(1, 2)$.

c) Să se determine ecuațiile care definesc pe g în reperul $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

d) Să se descompună g într-un produs de două transformări simple.

3° Fie vectorii $\vec{V}(x, y)$ și $\vec{V}'(x', y')$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$; h este forma biliniară simetrică definită prin:

$$h(\vec{V}, \vec{V}') = axx' + b(xy' + yx') + cyy',$$

în care a, b, c sînt trei numere reale presupuse cunoscute.

a) Ce relații trebuie să satisfacă coeficienții a, b, c pentru ca h să determine pe P o structură de spațiu euclidian?

b) Să se demonstreze că putem determina a, b, c astfel încît baza $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ să fie ortonormată.

Scanned with OKEN Scanner

17

TRANSFORMĂRI VECTORIALE. TRANSFORMĂRI AFINE

Vezi colecţia Alef_0:
Geometrie vol. I / Elemente de geometrie afină şi euclidiană
Capitolul 3
Capitolul 4

Fie $\mathfrak{L}$ un plan afin raportat la un reper $\mathfrak{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$.

Fiecărui număr real a i se asociază aplicaţia ψ_a a lui $\mathfrak{L}$ în $\mathfrak{L}$ definită în modul următor: orice punct M de coordonate (x, y) în reperul $\mathfrak{R}$ este transformat într-un punct M' ale cărui coordonate (x', y') sînt:

$$\begin{cases} x' = \frac{1+a}{2}x + \frac{1-a}{2}y \\ y' = \frac{1-a}{2}x + \frac{1+a}{2}y. \end{cases}$$

I. Aplicaţiei afine ψ îi este asociată aplicaţia vectorială f_a a unui plan vectorial P în P. Pentru orice vector $\overrightarrow{M_1M_2}$ din P avem: $f_a(\overrightarrow{M_1M_2}) = \overrightarrow{M_1'M_2'}$ cu $M_1' = \psi_a(M_1)$ şi $M_2' = \psi_a(M_2)$.

1° Să se definească aplicaţia vectorială f_a cu ajutorul componentelor vectorilor din P în baza $(\vec{i}, \vec{j})$.

Să se demonstreze că, aplicaţia vectorială f_a este un endomorfism al lui P pentru orice număr real a.

Care este matricea m_a asociată endomorfismului f_a în baza $(\vec{i}, \vec{j})$? Pentru ce valori ale lui a, f_a este un automorfism al lui P?

2° Care este mulţimea E_1 a vectorilor din P care rămîn invarianţi prin orice aplicaţie liniară f_a?

Care este mulţimea E_2 a vectorilor $\vec{V}$ din P care sînt transformaţi în $a\vec{V}$: $f_a(\vec{V}) = a\vec{V}$ prin orice aplicaţie liniară f_a?

3° Să se stabilească natura aplicaţiilor liniare f_0, f_1 şi f_{-1}.

4° Fie $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{J} = -\vec{i} + \vec{j}$; $(\vec{I}, \vec{J})$ formează o nouă bază a lui P. Să se stabilească matricea n_a asociată lui f_a în baza $(\vec{I}, \vec{J})$.

5° Se consideră mulţimea $\mathfrak{M}$ a matricelor de forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, a fiind un număr real nenul. Să se demonstreze că $\mathfrak{M}$, înzestrată cu produsul matricelor, este un grup comutativ.

Ce se poate conchide pentru mulţimea aplicaţiilor liniare f_a, unde a este un număr real nenul?

Scanned with OKEN Scanner

II. 1° Să se verifice că punctul O este invariant pentru orice aplicație ψ_a.

Ce se poate conchide din studiul de la I pentru aplicațiile ψ_a?

Să se precizeze, după valorile lui a, mulțimea punctelor duble, mulțimea dreptelor afine invariante global, mulțimea dreptelor afine paralele cu imaginea lor.

În particular, să se stabilească natura lui ψ_0, ψ_1 și ψ_{a1}

2° Se consideră mulțimea $\mathcal{F}$ a tuturor aplicațiilor ψ_a, a fiind un număr real nenul, și se înzestrează această mulțime cu legea de compoziție a aplicațiilor.

Ce se poate conchide pentru mulțimea $\mathcal{F}$ din studiul de la I. 5°?

Scanned with OKEN Scanner

18

PLAN VECTORIAL EUCLIDIAN ŞI PLAN AFIN ASOCIAT

Vezi colecţia Alef$_0$:
Analiză vol. I / *Calcul diferenţial, aplicaţii*
Capitolul 5, secţiunea 4
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 10

I. Se dă o bază $(\vec{i}, \vec{j})$ ortonormată a planului vectorial euclidian P. Fiind dat numărul real a, strict pozitiv, se studiază aplicaţia f a lui E în E definită prin:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto f(\vec{v}) = (x + ay)\vec{i} + y\vec{j}.$$

1° Să se demonstreze că f este liniară. Care este nucleul ei?
Să se demonstreze că f este un automorfism al lui P.
Care este matricea lui f?
Să se determine subspaţiul său invariant.

2° Se consideră şirul transformărilor succesive ale lui $\vec{v}$ prin f:

$$\vec{v}_1 = f(\vec{v}) \; ; \quad \vec{v}_2 = f(\vec{v}_1) \; ; \; \ldots \; ; \quad \vec{v}_n = f(\vec{v}_{n-1}).$$

Să se studieze limita, cînd n creşte nelimitat, a vectorului unitar al dreptei vectoriale dirijate de $\vec{v}_n$. Să se deducă poziţia limită a acestei drepte.

II. Se asociază planului vectorial precedent reperul cartezian ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ale cărui axe $x'Ox$, $y'Oy$ sînt dirijate respectiv de $\vec{i}$ şi $\vec{j}$.

1° Fiecărui punct M al dreptei afine $y'Oy$ i se asociază punctul M' definit prin:

$$\overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OM}).$$

Să se determine mulţimea D a punctelor M' cînd M descrie $y'Oy$.

2° Fiecărui punct M al parabolei C definite prin $y^2 = 2px$ (p este un număr real nenul dat) i se asociază punctul M' definit prin $\overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OM})$. Să se determine mulţimea C' a punctelor M'.

3° Să se compare tangenta în M la C cu tangenta în M' la C'. În particular, să se determine punctul S al lui C' în care tangenta este paralelă la Oy. Care este transformata lui C prin translaţia definită de $\overrightarrow{OS}$?

Pentru a reprezenta cele două curbe pe o singură figură, se va putea lua:

$$a = 2 \text{ şi } p = 2\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\|.$$

4° Să se calculeze aria domeniului cuprins între C' şi axa $y'Oy$ pentru x negativ sau nul.

Scanned with OKEN Scanner

19

TRANSFORMĂRI ORTOGONALE ALE UNUI SPAȚIU VECTORIAL EUCLIDIAN ȘI ALE UNUI SPAȚIU AFIN ASOCIAT

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 5

I. E reprezintă spațiul vectorial euclidian $\mathbf{R}^3$ pentru care este dată baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° E_1 este planul vectorial al vectorilor $a\vec{i} + b(\vec{j} + \vec{k})$, în care a și b sînt numere reale oarecare.

Să se determine dreapta vectorială D_1 ortogonală cu E_1.

Să se determine toate planele vectoriale Q care conțin un vector ortogonal cu E_1; să se precizeze în particular E_2, acela dintre planele Q care conține pe $\vec{i}$.

Să se demonstreze că E_1 și E_2 nu sînt subspații suplimentare lui E.

2° Să se demonstreze că E_1 și D_1 sînt două subspații suplementare lui E. Să se determine formulele care leagă coordonatele unui vector $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ cu cele ale imaginii sale $f(\vec{V})$ prin transformarea f, proiecția pe E_1 paralel cu D_1.

Care este nucleul lui f?

Este f injectivă? Este f surjectivă?

3° Să se determine transformata lui V printr-o simetrie ortogonală în raport cu E_1.

II. Spațiului vectorial E i se asociază spațiul afin $\mathcal{S}$ pentru care $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este un reper cartezian. Lui E_1 și E_2 le sînt astfel asociate planele afine $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ ce trec prin O; lui D_1 i se asociază dreapta afină $\mathcal{D}_1$ ce trece prin O.

1° Care sînt ecuațiile lui $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ și $\mathcal{D}_1$ în reperul lui $\mathcal{S}$?

2° Care sînt coordonatele punctului K, proiecția ortogonală a lui $M(x, y, z)$ pe $\mathcal{E}_1$?

Care sînt coordonatele lui P, simetricul lui M în raport cu $\mathcal{E}_1$?

III. Reprezentarea descriptivă a rezultatelor precedente.

Este posibil de a alege planul de proiecție astfel ca $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ să fie respectiv prima și a doua bisectoare: linia de pămînt este $x'x$; planul orizontal și planul frontal sînt asociate respectiv cu planele vectoriale H și F determinate de $\vec{i}$ și $\vec{j}$ de o parte și de $\vec{i}$ și $\vec{k}$ de altă parte.

1° Fie $\vec{U} = a\vec{i} + b(\vec{j} + \vec{k})$ un vector al lui E_1. Care sînt componentele proiecțiilor ortogonale pe planele vectoriale H și F?

Scanned with OKEN Scanner

Să se stabilească că proiecţiile orizontale şi verticale ale unui bipunct al lui $\mathscr{E}_1$ sînt simetrice în raport cu linia de pămînt. Ce reciprocă poate fi enunţată?

2° Procedînd de o manieră analoagă, pornind de la un vector al lui E_2, să se studieze proiecţiile orizontale şi frontale ale unui bipunct al lui $\mathscr{E}_2$.

3° Să se deducă din aceste rezultate, proiecţiile unui bipunct (M, N):

a) cînd suportul lui (M, N) este paralel cu $\mathscr{E}_1$;

b) cînd suportul lui (M, N) este paralel cu $\mathscr{E}_2$;

c) cînd suportul lui (M, N) este ortogonal cu $\mathscr{E}_1$;

d) cînd suportul lui (M, N) este ortogonal cu $\mathscr{E}_2$.

4° M este dat prin proiecţiile sale (m, m'). Se notează cu $K(k, k')$ proiecţia ortogonală a lui M pe $\mathscr{E}_1$. Linia de rapel mm' intersectează linia de pămînt în I şi cu m_1 se notează simetricul lui m în raport cu această linie de pămînt.

Să se demonstreze: $\overrightarrow{Ik'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Im_1} + \overrightarrow{Im'})$.

Să se deducă o metodă pentru a determina pe K.

Să se construiască P, simetricul lui M în raport cu $\mathscr{E}_1$.

Să se obţină acelaşi punct P prin o a doua metodă: să se determine intersecţia lui $\mathscr{E}_1$ cu vetricala din M; să se rabată planul de profil al lui M pe planul frontal al lui M.

5° O dreaptă oarecare Δ fiind dată prin proiecţiile sale (δ, δ'), să se construiască intersecţia sa cu prima bisectoare $\mathscr{E}_1$. Să se trateze aceeaşi chestiune cu a doua bisectoare $\mathscr{E}_2$.

6° Se alege pe cea de a doua bisectoare o nouă line de pămînt paralelă cu precedenta; se păstrează planele vectoriale care determină proiecţiile.

Din proprietatea caracteristică a punctelor celei de a doua bisectoare, să se deducă că epura unui punct oarecare rămîne invariantă la această operaţie.

Scanned with OKEN Scanner

20

TRANSFORMĂRI AFINE ALE PLANULUI

Vezi colecţia Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 5

Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin asociat lui E, spaţiu vectorial de dimensiune 2 peste corpul numerelor reale.

1° Fie O un punct fix în $\mathcal{E}$; se notează cu $A_0(\mathcal{E})$ mulţimea transformărilor afine care conservă punctul O.

Să se demonstreze că $A_0(\mathcal{E})$ este un subspaţiu afin al mulţimii $A(\mathcal{E})$ a transformărilor afine ale lui $\mathcal{E}$.

2° Fie O şi I două puncte fixe în $\mathcal{E}$.

a) Să se demonstreze că există un vector $\vec{v}$ şi numai unul singur în E astfel încît aplicaţia următoare (unde t reprezintă o translaţie) să fie un izomorfism al grupului $A_0(\mathcal{E})$ pe grupul $A_I(\mathcal{E})$:

$$A_0(\mathcal{E}) \overset{\varphi}{\mapsto} A_I(\mathcal{E})$$

$$f \mapsto \varphi(f) = t(-\vec{v}) \circ f \circ t(\vec{v}).$$

b) Să se demonstreze că pentru orice număr real a nenul şi diferit de 1, există un punct H în $\mathcal{E}$ şi numai unul singur astfel încît următoarea aplicaţie ψ (unde h reprezintă o omotetie) să fie un izomorfism al grupului $A_0(\mathcal{E})$ pe grupul $A_I(\mathcal{E})$:

$$A_0(\mathcal{E}) \overset{\psi}{\mapsto} A_I(\mathcal{E})$$

$$f \mapsto \psi(f) = h\left(H, \frac{1}{a}\right) \circ f \circ h(H, a).$$

3° Dacă f este o transformare afină a lui $\mathcal{E}$, se va nota cu $\hat{f}$ aplicaţia sa liniară asociată în E. Fie $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ o bază a lui E.

Se notează cu G_0 mulţimea elementelor lui $A_0(\mathcal{E})$ astfel încît matricea lui $\hat{f}$ în $\mathcal{B}$ să aibă forma:

$$M(\hat{f}) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \text{ cu } kk' \neq 0.$$

Se notează cu H_0 submulţimea lui G_0 care corespunde lui $k = k'$.

a) Să se demonstreze că G_0 este un subgrup comutativ al lui $A_0(\mathcal{E})$.

b) Dacă f aparţine lui G_0, care este mulţimea punctelor invariante prin f?

c) Să se demonstreze că H_0 este un subgrup al lui G_0.

Scanned with OKEN Scanner

d) Să se demonstreze:

$$\left.\begin{array}{l} f \in A_0(\mathcal{E}) \\ g \in H_0 \end{array}\right\} \forall f,\ \forall g \quad f^{-1} \circ g \circ f = g.$$

e) Dacă G_0' și G_0'' sînt submulțimi ale lui G_0 care corespund respectiv lui $k' = 1$ și $k = 1$, să se demonstreze:

că G_0' și G_0'' sînt subgrupuri ale lui G_0;

că ele sînt izomorfe;

că orice aplicație din $A_0(\mathcal{E})$ este produsul comutativ al unei aplicații din G_0'' cu o aplicație din G_0'.

4° a) Să se demonstreze că aplicația φ definită la 2° a) transformă G_0 în G_1, H_0 în H_1, G_0' în G_1', G_0'' în G_1''.

b) Dacă $\mathcal{H}(d)$ reprezintă mulțimea omotetiilor din $\mathcal{E}$ al căror raport este d (d este un număr real nenul), să se demonstreze că următoarea aplicație β este o bijecție:

$$E \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(d)$$

$$\vec{v} \mapsto t(-\vec{v}) \circ h(0,\ d) \circ t(\vec{v}).$$

5° a) Să se demonstreze că aplicația ψ definită la 2° b) transformă G_0 în G_1, H_0 în H_1, G_0' în G_1', G_0'' în G_1''.

b) Să se demonstreze că următoarea aplicație γ este o bijecție:

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}(d)$$

$$A \mapsto h\left(A,\ \frac{1}{a}\right) \circ h(0,\ d) \circ h(A,\ a).$$

6° Fie $(O,\ P,\ Q,\ R)$ cuadruplul de puncte din $\mathcal{E}$ definit prin:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{i},\ \overrightarrow{OQ} = \vec{j},\ \overrightarrow{OR} = \vec{i} + \vec{j}.$$

Care sînt transformările afine din $\mathcal{E}$ care conservă paralelogramul definit de acest cuadruplu?

Care sînt transformările afine din $A_0(\mathcal{E})$ care conservă același paralelogram?

Mai întîi, s-ar putea demonstra următorul rezultat:

Dacă se dau două paralelograme din $\mathcal{E}$, există opt transformări afine prin care cel de al doilea este imaginea primului.

Scanned with OKEN Scanner

21
O APLICAȚIE AFINĂ

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 5

$\mathfrak{E}$ reprezintă un spațiu vectorial peste $\mathbf{R}$ și E un spațiu afin asociat. În partea A, dimensiunea lui $\mathfrak{E}$ este finită însă oarecare; în partea B, dimensiunea lui $\mathfrak{E}$ este 2.

Fie φ un endomorfism al lui $\mathfrak{E}$ în $\mathfrak{E}$ și fie f aplicația afină a lui E în E asociată lui φ; se va nota atunci:

$$f(A) = A' ; f(B) = B' ;$$

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}.$$

A. 1° Să se demonstreze că relația binară în E, notată cu $\mathfrak{R}$ și definită prin:

$$A\mathfrak{R}B \Leftrightarrow f(A) = f(B),$$

este o relație de echivalență.

2° Să se demonstreze că clasele de echivalență sînt subspații afine de aceeași direcție și de aceeași dimensiune.

3° a) Ce condiții trebuie să verifice f pentru ca să nu existe decît o clasă de echivalență?

b) Ce condiții trebuie să verifice f pentru ca fiecare clasă de echivalență să nu conțină decît un singur element?

B. $\mathfrak{E}$ fiind de dimensiune 2, $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază; $(O, \vec{i}, \vec{j})$ este un reper al lui E.

În acest reper, A admite drept coordonate pe (a, b) și $f(A) = A'$ admite drept coordonate pe $(-a + b - 1, -2a + 2b - 1)$.

1° Să se determine clasa lui 0 pentru relația $\mathfrak{R}$.

2° Să se verifice că clasele de echivalență pentru relația $\mathfrak{R}$ sînt subspații afine de aceeași direcție.

3° Pe ce submulțime a lui E restricția lui f este aplicația identică?

4° Să se stabilească matricea lui φ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$; care este determinantul acestei matrice?

5° Fie $O'(-1, -1)$.

a) Să se verifice că $\overrightarrow{O'A'}$ are o direcție fixă.

b) Dacă A este punctul de coordonate (e^t, t), să se demonstreze:

$$\overrightarrow{O'A'} = g(t)(\vec{i} + 2\vec{j}).$$

Să se traseze curba care reprezintă, într-un reper oarecare, variația lui g cînd t parcurge corpul numerelor reale.

Scanned with OKEN Scanner

22
ROTAŢII ŞI ASEMĂNĂRI

Vezi colecţia Alef$_0$:
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 8, secţiunea 2
Capitolul 9

Reperul planului afin P este ortonormat.

Fiecărui punct $A(x, y)$ i se asociază $B(0, x)$ şi $C(y, 0)$ apoi baricentrul A' al lui A, B şi C, prevăzuţi respectiv cu coeficienţii 1, m şi $-m$ (m fiind un număr real).

Se notează cu x' şi y' coordonatele lui A'.

1° f_m este aplicaţia planului P în el însuşi definită prin $f_m(A) = A'$; φ_m este aplicaţia vectorială asociată lui f_m.

Să se demonstreze că f_m este o aplicaţie afină bijectivă.

Există un punct invariant?

f_m poate fi transformarea identică a lui P?

2° Să se demonstreze relaţiile:

$$m(AB^2 - A'B^2 - AC^2 + A'C^2) = 2AA'^2;$$

$$BA^2 - mA'B^2 - mBC^2 + A'C^2 = BA'^2 + AA'^2;$$

$$CA^2 - mA'B^2 + mBC^2 + mA'C^2 = CA'^2 + AA'^2.$$

3° m şi m' fiind două numere reale oarecare, se consideră endomorfismele φ_m şi $\varphi_{m'}$, asociate respectiv lui f_m şi $f_{m'}$.

Să se alcătuiască matricea $T(m, m')$ a lui $\psi = \varphi_{m'} \circ \varphi_m$.

Să se deducă că φ_m şi $\varphi_{m'}$ se pot comuta şi că mulţimea Φ a endomorfismelor φ_m nu este închisă faţă de legea de compoziţie a endomorfismelor (s-ar putea utiliza grupul multiplicativ al numerelor complexe de forma $z_m = 1 + im$, izomorf cu mulţimea matricelor din Φ).

4° Să se demonstreze că matricea M_m asociată lui φ_m este produsul dintre o matrice scalară K şi matricea R a unei rotaţii.

Să se exprime, în funcţie de m, parametrii (K, cos θ şi sin θ) care definesc pe φ_m.

Să se exprime în funcţie de parametrii K, K', θ şi θ' ai lui φ_m şi $\varphi_{m'}$ parametrii K'' şi θ'' care determină pe ψ.

5° A cărei mulţimi Δ, este dreapta de ecuaţie $x' = a$ imagine directă prin f_m?

A cărei mulţimi Δ', este dreapta de ecuaţie $y' = b$ imagine directă prin f_m?

Să se examineze cum sînt situate una, în raport cu cealaltă, mulţimile Δ şi Δ'. Să se reprezinte Δ şi Δ' în următorul caz:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad m = \frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6° Fie $\mathcal{F}$ mulţimea aplicaţiilor afine f ale lui P în P, cînd m parcurge corpul numerelor reale. A' fiind fixat în P, prin coordonatele sale a şi b, fiecărei valori a lui m i se asociază un punct a cărui imagine prin f_m este A'. Să se alcătuiască mulţimea Γ a punctelor A cînd f_m parcurge pe $\mathcal{F}$. Am putea prevedea geometric acest rezultat plecînd de la a 5-a chestiune?

7° Să se stabilească ecuaţia mulţimii E a imaginilor unui punct fix A_0 de coordonate x_0, y_0 prin aplicaţiile din $\mathcal{F}$; să se definească E.

Să se regăsească E pe cale geometrică considerînd centrele ω ale cercurilor Ω circumscrise triunghiurilor (O, Q, Q'): Q este intersecţia axei Ox cu dreapta variabilă D care trece prin A_0; Q' este intersecţia axei Oy cu perpendiculara D' la D care de asemenea trece prin A_0; s-ar putea căuta aplicaţia g a lui P în P definită prin $g(\omega) = A'$.

Scanned with OKEN Scanner

23

ROTAŢII ÎN PLAN

Vezi colecţia $Alef_0$:
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 8, secţiunea 2

Fie $\mathfrak{E}$ planul euclidian în care vor fi studiate proprietăţile figurilor din prezenta problemă: figuri simple şi îngrijite vor sugera adesea principiile de demonstraţie şi rezultatele căutate.

Clasele de echipolenţă ale bipunctelor din $\mathfrak{E}$ constituie un plan vectorial π.

I. În π este considerată o rotaţie vectorială φ. Se notează cu α respectiv β aplicaţia nulă şi aplicaţia identică a lui π în el însuşi:

$$\vec{X} \in \pi;\ \forall \vec{X}:\ \alpha(\vec{X}) = \vec{0},\ \beta(\vec{X}) = \vec{X}.$$

Lui φ i se asociază aplicaţia liniară ψ a lui π în el însuşi definită prin:

$$\psi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}) - \vec{X}.$$

1° Să se studieze ψ în cazul în care este β?

2° Să se demonstreze:

$$[\operatorname{Ker}\psi = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow [\varphi \neq \beta]$$

(notaţia Ker f reprezentînd nucleul aplicaţiei liniare f). Să se conchidă, în acest caz, că ψ este un automorfism al lui π.

3° Să se precizeze cazul în care ψ este o rotaţie vectorială: să se compare apoi ψ cu φ: în particular, să se studieze $\varphi \circ \psi$ şi $\psi \circ \varphi$.

4° Pentru $\varphi \neq \beta$, să se demonstreze că ψ este produsul comutativ dintre o rotaţie vectorială şi o omotetie vectorială al cărei raport este strict pozitiv. Să se determine, cu ajutorul lui φ, elementele celor două automorfisme ale lui π.

II. Lui φ din π îi corespunde în $\mathfrak{E}$ o transformare afină f care face ca fiecărui punct M din $\mathfrak{E}$ să-i corespundă punctul $M' = f(M)$:

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

În plus, se cunoaşte transformatul O' al unui punct particular O.

a) Dacă φ este β, care este f?

b) Dacă φ este o rotaţie vectorială alta decît β, să se demonstreze că orice punct I confundat cu transformatul său $I' = f(I)$ este determinat de ecuaţia:

$$\varphi(\overrightarrow{IO}) - \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{OO'}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se conchidă că I există și că este unic (I este centrul rotației f). Să se precizeze cazurile în care O și O' sînt confundate.

III. Un triunghi echilateral (A, B, C) din $\mathfrak{P}$ este dat, iar sensul de parcurs de la A la B și apoi la C pe cercul circumscris este ales ca sens direct. Se consideră două rotații vectoriale din π.

1° φ_1 este determinat prin $\cos \varphi_1 = \frac{1}{2}$ și $\sin \varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; C se transformă în B prin f_1. Care este centrul rotației f_1?

Să se determine $f_1(A)$ și $f_1(B) = D$.

2° φ_2 este determinat prin $\cos \varphi_2 = -\frac{1}{2}$ și $\sin \varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; D se transformă în C prin f_2. Care este centrul rotației f_2?

Să se determine $f_2(A)$, $f_2(B)$ și $f_2(C)$.

3° Să se studieze produsele $\varphi_2 \circ \varphi_1$ și $f_2 \circ f_1$, $\varphi_1 \circ \varphi_2$ și $f_1 \circ f_2$.

IV. Un punct M din $\mathfrak{P}$ devine $M' = f_1(M)$ prin f_1; M' devine $M'' = f_2(M') = f_2 \circ f_1(M)$ prin f_2.

1° Să se compare $\frac{MM'}{MM''}$ cu $\frac{MA}{MQ}$ în care Q reprezintă mijlocul lui $[BC]$.

Care este mulțimea $\mathcal{C}_1$ a punctelor M pentru care există o rotație vectorială care transformă $\overrightarrow{MM'}$ în $\overrightarrow{MM''}$?

Să se precizeze punctele din $\mathcal{C}_1$ care aparțin dreptei AQ.

2° Să se demonstreze:

$$(MM', MM'') = O[\pi] \Leftrightarrow (MA, MQ) = \frac{\pi}{3} [\pi].$$

Care este mulțimea $\mathcal{C}_2$ a punctelor M pentru care M, M' și M'' sînt coliniare?

Să se precizeze punctele din $\mathcal{C}_2$ care aparțin dreptei AC.

3° Există o rotație vectorială φ care transformă semidreapta vectorială dirijată de MM' în semidreapta vectorială dirijată de MM''. Care este mulțimea $\mathcal{C}_3$ a punctelor M pentru care $\cos \varphi$ este egal cu $\frac{1}{2}$?

4° Să se determine M astfel încît triunghiul (M, M', M'') să fie echilateral. Sensul de parcurs de la M către M' apoi către M'' este sensul direct?

Scanned with OKEN Scanner

24

TRANSFORMĂRI AFINE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

Vezi colecţia Alef$_0$:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 4

I. *Transformări ortogonale ale planului vectorial E.*

Se consideră baza ortonormată canonică $(\vec{j}, \vec{k})$ a planului vectorial euclidian E; notaţia i este rezervată pentru numărul complex $(0; 1)$.

1° Care este matricea rotaţiei vectoriale r care transformă $\vec{u} = x\vec{j}$ în $\vec{u}' = x\vec{k}$, x fiind un număr real diferit de zero?

Care este unghiul acestei rotaţii?

Care sînt componentele scalare ale transformatei $\vec{v}'$, prin r, a lui $\vec{v} = x\vec{j} + y\vec{k}$? Aplicaţie la $\vec{v}_0 = -\vec{j} + \vec{k}$.

2° Care este matricea simetriei vectoriale s_1 care transformă $\vec{u} = x\vec{j}$ în $\vec{u}' = x\vec{k}$?

Care este dreapta vectorială d_1 a vectorilor invarianţi prin această simetrie?

Care sînt componentele scalare ale transformatei $\vec{v}''$, prin s_1, a lui $\vec{v} = x\vec{j} + y\vec{k}$. Aplicaţie la $\vec{v}_0 = -\vec{j} + \vec{k}$.

3° Se notează cu s simetria vectorială în raport cu dreapta vectorială dirijată de $\vec{k}$. Să se demonstreze că transformarea vectorială definită de $s_2 \circ s_1$ este rotaţia vectorială precedentă r.

4° Se notează cu s_1' simetria vectorială în raport cu dreapta vectorială dirijată de $\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$. Să se determine matricea şi subspaţiul vectorial al vectorilor invarianţi prin simetria vectorială s_2' definită prin: $s_2 \circ s_1 = s_2' \circ s_1'$.

5° Să se demonstreze că dreapta vectorială d_4, ortogonală cu vectorul $-8\vec{j} + 2\vec{k}$, este dirijată de vectorul $\vec{j} + 4\vec{k}$.

Să se demonstreze că simetria vectorială s_4 în raport cu d_4 are ca matrice:

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se demonstreze că dacă se consideră simetria vectorială s_3 în raport cu dreapta vectorială d_3 dirijată de vectorul $5\vec{j} + 3\vec{k}$, are loc: $r = s_4 \circ s_3$. Care este unghiul dintre dreptele vectoriale (d_3, d_4)?

II. Planul afin euclidian $\mathcal{E}$, asociat lui E, este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{j}, \vec{k})$; axele sînt $x'Ox$ și $y'Oy$ dirijate respectiv de $\vec{j}$ și $\vec{k}$.

1° Se consideră rotația afină $\mathcal{R}$, asociată lui r, care transformă punctul $A(5; 0)$ în $A'(-3; 2)$. În această rotație, punctul curent $M(x, y)$ al lui $\mathcal{E}$ este transformat în $M'(x', y')$:

$$r(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{\mathcal{R}(A)\mathcal{R}(M)}.$$

Să se deducă, cu ajutorul matricei r, coordonatele lui M', cunoscînd cele ale lui M.

Care este centrul ω al rotației $\mathcal{R}$?

Cum pot fi regăsite aceste rezultate cu ajutorul numerelor complexe?

Aplicație: să se transforme punctele $B(8; 0)$, $C(8; 2)$, $D(3; 2)$. Să se traseze figura corespondentă (A', B', C', D').

2° Se consideră simetria afină ortogonală $\mathcal{S}$ în raport cu $y'Oy$. Să se determine dreapta afină $\mathcal{D}_1$ astfel încît, dacă $\mathcal{S}_1$ reprezintă simetria afină ortogonală în raport cu $\mathcal{D}_1$, să aibă loc $\mathcal{R} = \mathcal{S} \circ \mathcal{S}_1$.

Să se determine dreptele afine $\mathcal{D}_1'$ și $\mathcal{D}_2'$, axele de simetrie ortogonale afine $\mathcal{S}_1'$ și $\mathcal{S}_2'$ asociate la s_1' și s_2' și care verifică:

$$\mathcal{R} = \mathcal{S}_2' \circ \mathcal{S}_1'.$$

Cum pot fi regăsite aceste rezultate cu ajutorul numerelor complexe?

Să se reprezinte transformările succesive ale cuadruplului (A, B, C, D).

3° Se consideră rotația afină $\mathcal{R}'$ care este asociată lui r și care are ca centru pe A, apoi translația afină $\tau(\vec{V})$ definită prin $\vec{V} = \overrightarrow{AA'}$.

Să se demonstreze: $\mathcal{R} = \tau \circ \mathcal{R}'$.

Cum pot fi regăsite aceste rezultate cu ajutorul numerelor complexe?

Să se reprezinte transformările succesive ale cuadruplului (A, B, C, D).

4° Se consideră antideplasarea $\mathcal{U}$ definită plecînd de la simetria vectorială s_1 definită în *I*, 2°.

A are ca imagine pe A'; punctul curent M din $\mathcal{E}$ este transformat în $M' = \mathcal{U}(M)$ prin:

$$s_1(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{\mathcal{U}(A)\mathcal{U}(M)}.$$

Să se demonstreze că această antideplasare poate fi considerată ca un produs dintre o simetrie ortogonală afină în raport cu o dreaptă Δ care va fi determinată și o translație paralelă cu Δ; să se demonstreze că acest produs este comutativ. Să se demonstreze că mijlocul lui $[AA']$ aparține lui Δ.

Scanned with OKEN Scanner

Cum pot fi regăsite aceste rezultate cu ajutorul numerelor complexe?

Să se facă o figură plecînd de la cuadruplul (A, B, C, D).

III. *Transformări vectoriale ortogonale ale spațiului vectorial F a cărui dimensiune este* 3.

Se consideră baza ortonormată canonică a lui F: $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$.

Pentru părțile III și IV, vom avea de cîștigat prin desenarea cu grijă a figurilor în perspectivă cavalieră sau, mai curînd, a reprezentărilor din geometrie descriptivă prin o alegere convenabilă a planelor de proiecție.

1° Să se scrie ecuația planului vectorial P definit prin $\vec{u} = -\vec{k} + \vec{l}$ și $\vec{j}$.

Se consideră simetriile vectoriale σ_1 și σ_2 în raport cu dreptele vectoriale determinate respectiv de $\vec{u}$ și $\vec{j}$.

Să se caracterizeze rotația vectorială $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ prin dreapta sa vectorială invariantă și unghiul său; este aici util de a orienta planul vectorial P?

2° Se consideră simetria vectorială ortogonală σ_4 în raport cu dreapta vectorială dirijată de $\vec{l}$.

Să se caracterizeze rotația vectorială $\rho = \sigma_4 \circ \sigma_3$. Să se calculeze componentele scalare ale transformatului lui $\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{l}$ prin ρ.

IV. *Generalizare la spațiul afin euclidian $\mathfrak{F}$ asociat lui F a unor rezultate obținute în II.*

Reperul ortonormat este $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$; axele sînt $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ dirijate respectiv de $\vec{j}, \vec{k}, \vec{l}$.

1° Se consideră rotația afină $\mathfrak{R}$ care este asociată lui ρ și care transformă punctul $A(1; 5; 0)$ în $A'(1; -3; 2)$. Să se determine axa și unghiul acestei rotații $\mathfrak{R}$.

Să se scrie ecuația planului afin $\mathfrak{P}'$ transformatul prin $\mathfrak{R}$ al planului afin $\mathfrak{P}$ asociat lui P.

2° Fie $\mathfrak{D}$ și $\mathfrak{D}'$ dreptele afine ale căror ecuații sînt, respectiv:

$$\mathfrak{D} \begin{cases} x = 0 \\ z = y - 3 \end{cases} \quad \text{și} \quad \mathfrak{D}' \begin{cases} x = 3 \\ y = 0. \end{cases}$$

Să se determine perpendiculara comună la aceste două drepte.

Să se studieze transformarea afină definită de $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}' \circ \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ și $\mathfrak{S}'$ fiind simetriile ortogonale în raport cu dreptele afine $\mathfrak{D}$ și $\mathfrak{D}'$.

Care este transformatul lui $I(0; 5; 0)$?

3° Aplicație, pentru aceste două ultime chestiuni, la mulțimea de puncte:

$$A(1; 5; 0);\ B(1; 8; 0);\ C(1; 8; 2);\ D(1; 3; 2);$$
$$G(-1; 5; 0);\ H(-1; 8; 0);\ J(-1; 8; 2);\ K(-1; 5; 2).$$

Scanned with OKEN Scanner

25
CONURI DE REVOLUȚIE

Vezi colecția Alef$_0$:
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 10

I. Spațiul vectorial E, de dimensiune 3, este raportat la baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

α este un număr real constant din $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; t este un număr real variabil.

Se consideră mulțimea vectorilor $\vec{u}(t)$ de forma :

$$u(\vec{t}) = \sin\alpha\cos t\,\vec{i} + \sin\alpha\sin t\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}.$$

1° Să se demonstreze că oricare dintre vectorii $\vec{u}$ este un vector unitar.

2° Care este transformatul lui $\vec{u}(t)$ printr-o rotație r care lasă invariantă dreapta vectorială orientată de $\vec{k}$?

Care este, într-o astfel de rotație, transformata mulțimii C a dreptelor vectoriale $D(t)$ care fiecare este orientată de unul din vectorii $\vec{u}(t)$?

3° Care este transformata C printr-o omotetie vectorială ?

Care este transformata lui C printr-o simetrie ortogonală în raport cu planul vectorial definit de $\vec{i}$ și $\vec{j}$?

Care este transformata lui C printr-o simetrie ortogonală în raport cu planul vectorial definit de $\vec{i}$ și $\vec{k}$?

Care este transformata lui C printr-o simetrie ortogonală în raport cu unul din planele vectoriale care conțin pe $\vec{k}$?

Care este transformata lui C printr-o simetrie ortogonală în raport cu dreapta vectorială orientată de $\vec{i} + \vec{k}$?

4° Ce condiție trebuie impusă lui α pentru ca dreapta vectorială Δ orientată de $\vec{v}(1, 0, -1)$ să nu aparțină lui C ?

Această condiție fiind îndeplinită, care este intersecția dintre C și planul vectorial $P(t)$ definit de $\vec{v}$ și $\vec{u}(t)$? Poate această intersecție să se reducă la $D(t)$?

II. Spațiul afin $\mathcal{E}$ asociat lui E este raportat la reperul cartezian ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; axele sînt $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

a este măsura unei lungimi.

Se marchează punctele fixe $S_1(a, 0, a)$ și $S_2(-a, 0, -a)$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea de cîştigat prin desenarea cu grijă a figurilor în perspectivă cavalieră sau, mai curînd, prin reprezentarea secţiunilor plane şi prin utilizarea procedeelor geometriei descriptive printr-o alegere convenabilă a planelor de proiecţie.

Fiecărui vector $\vec{u}(t)$ din E i se asociază punctul $M(t)$ definit prin $\overrightarrow{OM} = \vec{u}(t)$. Fiecărei drepte $D(t)$ din E i se asociază două drepte afine $\mathcal{D}_1(t)$ şi $\mathcal{D}_2(t)$ care trec respectiv prin S_1 şi S_2.

1° Care este mulţimea γ_α a punctelor $M(t)$ care corespund la aceeaşi valoare a lui α?

Care este mulţimea Σ a lui γ_α cînd α descrie intervalul din $\mathbf{R}$ care îi este impus?

Care este ecuaţia lui Σ în reperul din $\mathcal{E}$?

2° Care sînt mulţimile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ ale dreptelor $\mathcal{D}_1(t)$ şi $\mathcal{D}_2(t)$ care corespund la o aceeaşi valoare a lui α? Care sînt ecuaţiile lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în reperul lui $\mathcal{E}$?

3° Fie $\mathcal{F}_1$ şi $\mathcal{F}_2$ mulţimile punctelor din $\mathcal{C}_1$ respectiv $\mathcal{C}_2$; fie $\mathcal{H}$ intersecţia dintre $\mathcal{F}_1$ şi $\mathcal{F}_2$, al cărei punct curent va fi notat cu Q. În ce fel chestiunea 4° din I ar putea permite de a determina oricare din punctele Q şi, prin urmare, curba $\mathcal{H}$ (nu se cere determinarea efectivă)?

4° Să se demonstreze că $\mathcal{H}$ este o curbă plană; să se studieze în particular cazul în care α este egal cu $\frac{\pi}{4}$.

5° Prin litere cu accente se reprezintă proiecţiile ortogonale pe planul xOy a diverselor elemente din $\mathcal{E}$: S_1', S_2', Q', $\mathcal{H}'$ sînt proiecţiile respectiv ale lui S_1, S_2, Q, $\mathcal{H}$.

a) Să se compare $S_1'Q'$ cu QQ' (a şi α intervin în această comparaţie). Să se studieze:

$$S_1'Q' + S_2'Q' \text{ pentru } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$|S_1'Q' - S_2'Q'| \text{ pentru } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

b) Care este ecuaţia lui $\mathcal{H}$? Care este natura acestei curbe? Care îi sînt elementele remarcabile?

Scanned with OKEN Scanner

26

O FAMILIE DE DREPTE ÎN PLANUL EUCLIDIAN

Vezi colecţia Alef$_0$:
Algebră / Geometrie, vol. II *Geometrie vectorială, geometrie afină*
Capitolul 4
Capitolul 7

Fie $\mathfrak{P}$ un plan euclidian în care sînt fixate două puncte O şi I.

Fie Π planul vectorial asociat lui $\mathfrak{P}$; Π este mulţimea claselor de echipolenţă ale bipunctelor din $\mathfrak{P}$; în particular, se pune $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$.

Se consideră, în $\mathfrak{P}$, cercul fix $\mathcal{C}$ al cărui centru este O şi care conţine pe I; s-ar putea alege ca unitate de lungime măsura razei lui $\mathcal{C}$.

Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt doi vectori din Π, amîndoi diferiţi de $\vec{0}$, se ştie că există o rotaţie vectorială ρ, care transformă semidreapta vectorială dirijată de $\vec{u}$ în semidreapta vectorială dirijată de $\vec{v}$; acestei rotaţii ρ îi este asociată o clasă $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ de numere reale definite modulo 2π. Fiecare din aceste clase ar putea fi reprezentată prin unul oarecare din elementele sale, a, determinat prin:

$$\begin{cases} \sin a = \sin \rho \\ \cos a = \cos \rho. \end{cases}$$

Astfel, punctul A din $\mathcal{C}$ este fixat îndată ce este cunoscut a, unul dintre reprezentanţii lui $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OA})}$. Notaţii analoage vor fi utilizate pentru fiecare punct din $\mathcal{C}$. Fiecărui punct din $\mathcal{C}$ i s-ar putea asocia o matrice de rotaţie şi să tratăm o mare parte a problemei prin calcul matriceal; este preferabil să o tratăm direct printr-o examinare a proprietăţilor unghiurilor $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ şi a numerelor reale a care le sînt asociate.

1° Punctului A din $\mathcal{C}$, determinat de a, i se asociază punctul B din $\mathcal{C}$, determinat de b dat de:

$$b = -2a.$$

a) Să se demonstreze că astfel s-a definit o aplicaţie f a lui $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}$:

$$B = f(A).$$

b) Să se demonstreze că această aplicaţie f este surjectivă.

c) Să se demonstreze că f nu este injectivă; să se studieze diversele puncte X care au aceeaşi imagine B:

$$B = f(X).$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Să se studieze ecuaţia:

$$X = f(X).$$

2° Se reprezintă prin $\mathfrak{D}(a)$, sau simplu prin $\mathfrak{D}$, dreapta din $\mathfrak{L}$ care conţine A şi $B = f(A)$; familia acestor drepte este notată cu $\mathfrak{F}$.

a) Pot două drepte din $\mathfrak{F}$ să aparţină aceleiaşi direcţii?

b) Să se demonstreze că, printr-un punct M oarecare din $\mathcal{C}$, trec trei drepte ale familiei $\mathfrak{F}$; poate una din aceste drepte să fie bisectoarea unghiului celorlalte două?

c) Să se studieze dreptele din $\mathfrak{F}$ care conţin centrul lui $\mathcal{C}$.

d) Dacă două drepte din $\mathfrak{F}$ sînt perpendiculare, care este punctul comun lor? Care este mulţimea descrisă de acest punct cînd cele două drepte considerate variază în $\mathfrak{F}$ rămînînd perpendiculare?

e) Să se determine dreptele din $\mathfrak{F}$ care sînt tangente la $\mathcal{C}$.

f) Să se demonstreze că există pe $\mathcal{C}$ două puncte fixe J şi K, diferite între ele şi diferite de I, astfel încît dreptele din $\mathfrak{F}$ să poată fi definite pornind de la unul oarecare din aceste puncte printr-o relaţie analoagă celei care a fost utilizată în prima chestiune.

3° Fie $\mathfrak{D}_1$ şi $\mathfrak{D}_1'$ două drepte din $\mathfrak{F}$ care sînt perpendiculare; punctul lor comun este P_1. Fie atunci $\mathfrak{D}(a)$ o a treia dreaptă a familiei $\mathfrak{F}$; ea întîlneşte pe $\mathfrak{D}_1$ în Q şi pe $\mathfrak{D}_1'$ în Q'.

Să se demonstreze că punctul A asociat lui $\mathfrak{D}(a)$ este mijlocul lui $[QQ']$.

4° Se consideră o dreaptă particulară din $\mathfrak{F}$, care se notează cu $\mathfrak{D}(a_1)$ şi pe care se alege un punct Q.

a) Să se demonstreze că există alte două drepte în $\mathfrak{F}$, fie $\mathfrak{D}(a_2)$ şi $\mathfrak{D}(a_3)$, care conţin pe Q cu condiţia ca acest punct să aparţină unui anumit segment $\mathcal{S}$ al lui $\mathfrak{D}(a_1)$.

b) Să se demonstreze că, dacă Q este confundat cu o [respectiv cealaltă] extremitate a lui $\mathcal{S}$, $\mathfrak{D}(a_2)$ şi $\mathfrak{D}(a_3)$ se confundă într-o dreaptă din $\mathfrak{F}$ notată cu $\mathfrak{D}'$ [respectiv $\mathfrak{D}''$]. Care este poziţia relativă a lui $\mathfrak{D}'$ faţă de $\mathfrak{D}''$?

c) Cînd Q aparţine lui $\mathcal{S}$, să se calculeze:

$$a_1 + a_2 + a_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

27
GEOMETRIE METRICĂ

Vezi colecţia Alef$_0$:
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină şi euclidiană*
Capitolul 8, secţiunea 3

I. Fie spaţiul vectorial $E = \mathbf{R}^3$ pentru care se consideră baza canonică :

$$\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)\ ;\ \vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0)\ ;\ \vec{e}_3 = (0,\ 0,\ 1).$$

Se consideră aplicaţia φ a lui $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ în $\mathbf{R}$ definită prin :

$$\varphi(\vec{X},\ \vec{X}') = xx' + yy' + zz'$$

cu :
$$\begin{cases} \vec{X} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\ \vec{X}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3. \end{cases}$$

1° Să se demonstreze că astfel se defineşte o formă biliniară simetrică şi pozitivă.

2° Se numeşte normă a vectorului $\vec{X} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ numărul real :

$$||\vec{X}|| = \sqrt{\varphi(\vec{X},\ \vec{X})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Să se demonstreze :

a) $||\vec{X}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{X} = \vec{0}$;

b) $(\vec{X},\ \vec{X}') \in E \times E,\ \forall(\vec{X},\ \vec{X}')\ ||\vec{X} + \vec{X}'|| \leqslant ||\vec{X}|| + ||\vec{X}'||$;

c) $\left.\begin{matrix}(\vec{X},\ \vec{X}') \in E \times E \\ \lambda \in \mathbf{R}\end{matrix}\right\} \forall(\vec{X},\ \vec{X}'),\ ||\lambda\vec{X}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{X}||$;

d) $|x| \leqslant ||\vec{X}||\ ;\ |y| \leqslant ||\vec{X}||\ ;\ |z| \leqslant ||\vec{X}||$.

3° O aplicaţie liniară f a lui E în $\mathbf{R}$ se spune că este continuă în $\vec{X}_0$ din E în următoarele condiţii :

$$\varepsilon \in \mathbf{R}^{*+}\ \forall\varepsilon,\ \exists\eta \begin{cases} \eta \in \mathbf{R}^{*+} \\ [||\vec{X} - \vec{X}_0|| \leqslant \eta] \Rightarrow [||f(\vec{X}) - f(\vec{X}_0)|| < \varepsilon]. \end{cases}$$

Să se demonstreze că, pentru orice $\vec{X}_0$ din E, orice aplicaţie liniară a lui E în $\mathbf{R}$ este continuă în $\vec{X}_0$.

Scanned with OKEN Scanner

4° Să se demonstreze că există un număr real pozitiv sau nul, M, care verifică:

$$\vec{X} \in E \quad \forall \vec{X} \; ||f(\vec{X})|| \leqslant M||\vec{X}||.$$

II. Se consideră aplicația liniară a lui E în $\mathbf{R}$ definită prin:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$$

$$f(\vec{e}_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_3.$$

1° Să se demonstreze că f este o izometrie involutivă.

2° Să se determine mulțimea E_1 a vectorilor invarianți prin f.

Să se determine în această mulțime doi vectori, de bază $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

3° I fiind aplicația identică, să se determine nucleul E_2 al aplicației $g = f + I$.

Fie $\vec{w}$ un vector din baza lui E_2. Să se demonstreze că $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formează o bază a lui E. Care este natura aplicației f?

Se consideră aplicația f^n definită prin:

$$f^1 = f \text{ și } f^n = f^{n-1} \circ f \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

Să se precizeze natura lui f^n pentru orice număr natural n cel puțin egal cu 2.

Scanned with OKEN Scanner

28

SPAȚIU VECTORIAL ȘI SPAȚIU AFIN (CORPURI FINITE)

Vezi colecția Alef$_0$:
Algebră / Numere întregi
Capitolul I
Geometrie vol. I / *Spații vectoriale, spații afine*
Capitolul I

PRELIMINARII

Mulțimea K a claselor de echivalență modulo 3 conține 3 elemente: clasele lui 0, 1 și 2 pe care le vom nota respectiv cu e, a, b.

Se înzestrează K cu adunarea și înmulțirea claselor de echivalență modulo 3, pe care le vom nota exact ca operațiile omoloage din $\mathbf{Z}$.

Să se reamintească pe scurt definiția lui K și să se spună de ce această mulțime, înzestrată cu cele două legi interne ale sale, este un corp comutativ; să se scrie tablele de operare ale acestor două legi interne.

I. STRUCTURĂ VECTORIALĂ

Se notează cu E mulțimea $K \times K$ a perechilor de elemente din K.

1° Care este cardinalul lui E?

2° Se înzestrează E cu două legi:

a) o lege internă, notată cu $*$, asociază la 2 elemente (x, y) și (x', y') din E, elementul din E definit astfel: $(x, y) * (x', y') = (x + x', y + y')$.

b) o lege externă, notată cu T, asociază elementului (x, y) din E și elementului u din K elementul din E definit astfel: $u \,\mathrm{T}\, (x, y) = (ux, uy)$.

Să se demonstreze că E, înzestrată cu aceste două legi, este un spațiu vectorial peste K; elementele sale vor putea fi reprezentate sub formă vectorială obișnuită, însoțite sau nu de cele două componente ale elementului considerat: $\vec{V}$ sau $\vec{V}(x, y)$.

3° Se alege un element fix din E, fie acesta $\vec{V}_0(x_0, y_0)$. Se studiază apoi aplicația f a lui E în el însuși definită prin:

$$f(\vec{V}) = (x, y) * (x_0, y_0).$$

Să se demonstreze că f este o bijecție a lui E pe el însuși.

4° Conservă aplicația f structura de grup a lui $(E, *)$? Conservă ea legea externă T a lui E?

5° Să se demonstreze:

$$[x \,\mathrm{T}\, (a, e) * y \,\mathrm{T}\, (e, a) = (e, e)] \Rightarrow [x = y = e].$$

Să se demonstreze că (a, e) și (e, a) formează un sistem de generatori ai spațiului vectorial E.

Scanned with OKEN Scanner

Să se conchidă că $\{(a, e) ; (e, a)\}$ este o bază $\mathfrak{B}$ a lui E.

Să se demonstreze că același lucru este adevărat pentru $\mathfrak{B}' = \{(b, a) ; (e, b)\}$.

Să se enumere bazele lui E.

6° Un vector $\vec{V}$ din E are drept componente pe (x, y) în $\mathfrak{B}$ și (x', y') în $\mathfrak{B}'$. Să se calculeze x și y plecînd de la x' și y'; să se conchidă existența unei matrice, cu două linii și două coloane, formate din elemente din K și care verifică:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix};$$

să se determine P.

Dacă vrem să utilizăm baza $\mathfrak{B}'' = \{(a, b) ; (a, a)\}$, ce matrice Q trebuie să scriem pentru a cunoaște coordonatele (x'', y'') ale lui $\vec{V}$ în $\mathfrak{B}$? Cum putem afla (x', y') în funcție de (x'', y'') sau (x'', y'') în funcție de (x', y')?

II. STRUCTURĂ AFINĂ

1° Se consideră aplicația g a lui $F = E \times E$ în E definită prin:

$$g[(x, y), (x', y')] = (x' - x, y' - y).$$

Fiecare element din E va fi aici reprezentat printr-o literă grecească, însoțită sau nu de cele două componente ale elementului considerat: α sau $\alpha(x, y)$; atunci $g(\alpha, \beta)$, element al spațiului vectorial E, va fi notat cu $\overrightarrow{\alpha\beta}$.

a) Să se demonstreze că, α fiind dat în E, ca și vectorul $\vec{V}$ din E, există un element β din E care verifică:

$$g(\alpha, \beta) = \vec{V}.$$

b) Să se demonstreze:

$$[g(\alpha, \beta) = \vec{0}] \Leftrightarrow [\alpha = \beta].$$

c) Să se demonstreze că se poate scrie:

$$g(\alpha, \beta) + g(\beta, \gamma) = g(\alpha, \gamma)$$

pentru orice triplet de elemente din E.

d) Ce structură este astfel pusă în evidență?

2° În F este stabilită o rotație $\mathfrak{R}$ definită prin:

$$[(\alpha, \beta)\, \mathfrak{R}(\gamma, \delta)] \Leftrightarrow [g(\alpha, \beta) = g(\gamma, \delta)].$$

Să se demonstreze că este vorba de o relație de echivalență.

Să se demonstreze:

$$[(\alpha, \beta)\, \mathfrak{R}(\gamma, \delta)] \Leftrightarrow [(\alpha, \gamma)\, \mathfrak{R}(\beta, \delta)].$$

Scanned with OKEN Scanner

3° Fie G submulțimea lui F formată din perechile (ω, α) în care ω este elementul $\omega(0, 0)$ fix din E în timp ce α este elementul $\alpha(x, y)$ variabil în E.

G este înzestrată cu legi care decurg din $*$ și T din E și care sînt notate tot cu $*$ și T:

$$(\omega, \alpha) * (\omega, \beta) = (\omega, \gamma) \text{ cu } \gamma = \alpha * \beta = (x + x', y + y')$$

$$u\,\mathsf{T}\,(\omega, \alpha) = (\omega, \delta) \text{ cu } \delta = u\,\mathsf{T}\,\alpha = (ux, uy).$$

Să se demonstreze că G, înzestrată cu aceste două legi, este un spațiu vectorial peste E. Același lucru va fi și pentru H care se definește ca G prin înlocuirea lui $\omega(0, 0)$ cu un alt element ω' fix în E?

4° Se alege un vector fix în E, fie acesta V. Se stabilește în E transformarea t care asociază lui α din E pe α' din E definit prin:

$$g(\alpha, \alpha') = V;$$

în particular, lui ω îi este asociat ω': $g(\omega, \omega') = \vec{V}$.

Să se demonstreze că t este o bijecție a lui G pe H.

Conservă transformarea t structura de spațiu vectorial?

III. PUNCTE ȘI DREPTE

Se numește punct un element α din E, iar (x, y) sînt coordonatele sale; mulțimile Δ de puncte din E, ale căror coordonate verifică o relație de forma:

$$ux + vy + w = 0,$$

unde u și v nu sînt simultan nule, se numesc drepte.

1° Cîte drepte există?

Să se scrie ecuațiile lor $(ux + vy + w = 0)$.

Să se demonstreze că două puncte distincte determină o dreaptă și numai una singură.

Cîte puncte aparțin unei drepte date?

Cîte drepte trec printr-un punct dat?

2° O dreaptă Δ fiind dată, cîte drepte Δ' există a căror intersecție cu Δ este un punct de întoarcere? Se zice atunci că Δ și Δ' sînt secante.

3° Dacă Δ și Δ' nu sînt secante, se spune că ele sînt paralele. Să se demonstreze că relația de paralelism este o relație de echivalență. Cîte clase de echivalență există? Cîte elemente conține fiecare clasă?

4° Două puncte $\alpha(x, y)$ și $\beta(x', y')$ fiind date, li se asociază $\gamma(x'', y'')$ definit prin $2x'' = x + x'$ și $2y'' = y + y'$; γ se numește „mijlocul lui $[\alpha\ \beta]$".

Să se demonstreze că putem grupa punctele din E în triplete (α, β, γ) astfel încît α să fie mijlocul lui $[\beta\gamma]$, β mijlocul lui $[\gamma\alpha]$, γ mijlocul lui $[\alpha\beta]$; cîte astfel de triplete există?

Alegînd un triplet (λ, μ, ν) diferit de tripletele precedente, ce se poate spune despre trei drepte definite respectiv prin λ și mijlocul lui $[\mu\nu]$, μ și mijlocul lui $[\nu\lambda]$ și ν și mijlocul lui $[\lambda\mu]$?

Scanned with OKEN Scanner

29
CUATERNIONI

Vezi colecția Alef_0:
Geometrie vol. I / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 5, secțiunile 1 și 3
Geometrie vol. II / *Elemente de geometrie afină și euclidiană*
Capitolul 6

Fie $E = \mathbf{R}^4$ mulțimea cuadruplelor de numere reale (a, b, c, d). Această mulțime este înzestrată cu o lege internă (adunare) și o lege externă în care $\mathbf{R}$ este domeniul de operatori (înmulțire cu un număr real); aceste legi sînt definite respectiv prin

$$(a, b, c, d) + (a', b', c' d') = (a + a', b + b', c + c', d + d')$$

$$\lambda \cdot (a, b, c, d) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d).$$

În aceste condiții, $(E, +, \cdot)$ este un spațiu vectorial peste $\mathbf{R}$, baza canonică fiind formată din:

$$e_0 = (1, 0, 0, 0)\,;\ e_1 = (0, 1, 0, 0)\,;$$
$$e_2 = (0, 0, 1, 0)\,;\ e_3 = (0, 0,.0, 1).$$

PRIMA PARTE

Se definește în E o înmulțire, notată cu $\times$ aplicație a lui E^2 în E care este biliniară și care este determinată prin tabela următoare în care putem citi $e_i \times e_j$ (i și j sînt luați din $\{0, 1, 2, 3\}$).

x \ y	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

1° Să se demonstreze că, oricare ar fi indicii i, j, k din mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$, putem scrie:

$$(e_i \times e_j) \times e_k = e_i \times (e_j \times e_k).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se deducă că înmulţirea în E este asociativă:

Să se calculeze $(a, b, c, d) \times (a', b' c', d')$.

Să se demonstreze că $(E, +, \times)$ este un corp necomutativ (corp de cuaternioni).

2° Fie E_1 mulţimea cuaternionilor de forma $(a, 0, 0, 0)$.

Să se demonstreze că E_1 este un subcorp al lui E, izomorf cu corpul numerelor reale; s-ar putea deci pune atunci, prin convenţie, $E_1 = \mathbf{R}$ şi $(a, 0, 0, 0) = a$.

3° Se defineşte o aplicaţie h a lui E în E care asociază cuaternionului $q = (a, b, c\ d)$ imaginea sa $h(q) = (a, -b, -c, -d)$; $h(q)$ se numeşte conjugatul lui q şi se notează cu $\bar{q}$.

Să se demonstreze că aplicaţia h este un automorfism al grupului $(E, +)$.

Să se demonstreze: $\overline{q \times q'} = \overline{q'} \times \bar{q}$.

4° Fie N aplicaţia lui E şi E_1 (deci în $\mathbf{R}$) definită prin $N(q) = q \times \overline{q'}$.

Să se demonstreze că N este un omomorfism al lui $(E, \times)$ în $(\mathbf{R}, \times)$.

Numărul real $N(q)$ se numeşte norma lui q. Un cuaternion a cărui normă este egală cu 1 se numeşte normat. Să se verifice că dacă q este normat, inversul său este $\bar{q}$.

5° Fie E_2 mulţimea cuaternionilor de forma $(a, b, 0, 0)$.

Să se demonstreze că E_2 este un subcorp al lui E, izomorf cu corpul numerelor complexe.

Este adevărat acelaşi lucru pentru E_3 şi E_4, mulţimi de cuaternioni de forma $(a, 0, c, 0)$ şi $(a, 0, 0, d)$?

6° Fie E_5 mulţimea cuaternionilor în care cele 4 numere reale a, b, c, d sînt luate din $\mathbf{Z}$. Care este structura lui $(E_5, +, \times)$?

Să se demonstreze că dacă două numere întregi sînt şi unul şi altul sume de 4 pătrate (numere întregi), produsul lor este de asemenea sumă de 4 pătrate.

7° Fie E_6 mulţimea cuaternionilor în care cele patru numere reale a, b, c, d sînt fie toate luate din $\mathbf{Z}$ fie toate luate din $\mathbf{Z} + \frac{1}{2}$. Care este structura lui $(E_6, +, \times)$?

PARTEA A DOUA

Fie V_3 un spaţiu vectorial euclidian raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fiecărui cuaternion $q = (a, b, c, d)$ i se asociază:

a) numărul real a pe care-l numim scalarul cuaternionului;

b) vectorul $\vec{V}$ de coordonate (b, c, d) în baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; îl numim vectorul cuaternionului.

Să se demonstreze: $N(q) = a^2 + ||\vec{V}||^2$.

1° Fie doi cuaternioni q şi q_1 de scalari a şi a_1 şi de vectori $\vec{V}$ şi $\vec{V}_1$. Să se exprime scalarul şi vectorul cuaternionului $q \times q_1$ în funcţie de $a, a_1, \vec{V}, \vec{V}_1$, produsul scalar $\vec{V} \cdot \vec{V}_1$ şi produsul vectorial $\vec{V} \wedge \vec{V}_1$.

Scanned with OKEN Scanner

2° Fie r un cuaternion normat; există α din $[0, \pi]$ astfel încît scalarul și vectorul lui r să fie respectiv $\cos\alpha$ și $\vec{t} \cdot \sin\alpha$, $\vec{t}$ fiind un vector normat din V_3.

Fie p un cuaternion al cărui scalar este nul și al cărui vector este $\vec{V}$.

Să se determine vectorul $\vec{V}'$ al cuaternionului $r \times p \times r^{-1}$ (r^{-1} este inversul lui r). S-ar putea utiliza relația:

$$(\vec{V} \wedge \vec{V}') \wedge \vec{V}'' = (\vec{V} \cdot \vec{V}'') \cdot \vec{V}' - (\vec{V}' \cdot \vec{V}'') \cdot \vec{V}$$

care va fi demonstrată în prealabil.

3° Fie φ_r aplicația lui V_3 în V_3: $V' = \varphi_r(\vec{V})$.

Să se demonstreze că φ_r este o transformare ortogonală a lui V_3.

Să se demonstreze că φ_r este identitatea lui V_3 dacă și numai dacă sinusul de α este nul.

Să se demonstreze că, în celelalte cazuri, mulțimea vectorilor invarianți prin φ_r este dreapta vectorială $\mathfrak{D}$ de bază $\vec{t}$. Să se studieze atunci restricția lui φ_r la planul vectorial ortogonal cu $\mathfrak{D}$. Să se deducă că φ_r este rotația vectorială de axă $\mathfrak{D}$ și de unghi 2α.

4° Fie E_n mulțimea cuaternionilor normați. Se consideră aplicația lui u din E_n în mulțimea $\mathfrak{R}$ a rotațiilor din V_3: $u(r) = \varphi_r$.

Să se demonstreze că u este un omomorfism al lui $(E_n, \times)$ în $(\mathfrak{R}, 0)$.

5° În V_3 se dă o dreaptă vectorială $\mathfrak{D}$ de bază $\vec{t}(\beta, \gamma, \delta)$.

Fie R rotația vectorială de axă $\mathfrak{D}$ și de unghi θ. Dacă $\vec{V}$ are drept coordonate (x, y, z), care sînt coordonatele transformatului său $\vec{V}'$ prin rotația R?

6° Fie R_1, R_2, R_3 trei rotații vectoriale care au ca unghi comun pe $\frac{\pi}{2}$ și ale căror axe sînt respectiv trei drepte vectoriale de baze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Să se studieze cele șase produse pe care le putem imagina cu aceste trei rotații

Scanned with OKEN Scanner

30
PUTERI DE MATRICE

Vezi colecția Alef$_0$:
Analiză vol. II / *Calcul integral, aplicații*
Capitolul 8, secțiunea 2
Algebră / *Numere reale, calcul numeric, numere complexe*
Capitolul 3, secțiunea 3
Algebră / *Numere întregi*
Capitolul 3, secțiunea 4

În fiecare din problemele care urmează, litera A reprezintă o matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cu elemente reale; $\delta = ad - bc$ este determinantul său, $t = a + d$ este urma lui A. I reprezintă matricea $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; n este un număr întreg pozitiv.

I. 1° Să se calculeze A^n în funcție de A, de t și de n atunci cînd $\delta = 0$.

2° Să se calculeze A^n în funcție de A, de I și de n atunci cînd $\delta = 1$ și $t = 0$ (se va pune, după caz, $n = 2k$ sau $n = 2k + 1$).

3° Să se calculeze A^n în funcție de A, de I și de n atunci cînd $\delta = 1$ și $t = 2$.

4° Admițînd relațiile $\delta = 1$, $0 < t < 2$, să se calculeze A^n demonstrînd existența unui număr real θ și a unei matrice Ω, independente de n, astfel încît să aibă loc:

$$A^n = (\cos n\theta)\, I + (\sin n\theta)\, \Omega,$$

$$\Omega^2 = -I.$$

(Se va arăta mai înainte că t trebuie să fie egal cu $2\cos\theta$).

II. 1° Pentru fiecare număr real φ, se pune:

$$\mathrm{ch}\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}),$$

$$\mathrm{sh}\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}).$$

Să se demonstreze egalitățile:

$$\mathrm{ch}(n+1)\varphi = \mathrm{ch}n\varphi\mathrm{ch}\varphi + \mathrm{sh}n\varphi\mathrm{sh}\varphi$$

$$\mathrm{sh}(n+1)\varphi = \mathrm{sh}n\varphi\mathrm{ch}\varphi + \mathrm{ch}n\varphi\mathrm{sh}\varphi$$

$$1 = \mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi$$

$$\mathrm{ch}2\varphi = 2\mathrm{ch}^2\varphi - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2\varphi = \mathrm{ch}^2\varphi + \mathrm{sh}^2\varphi$$

$$\mathrm{sh}2\varphi = 2\mathrm{sh}\varphi\mathrm{ch}\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

precum și relațiile:

$$\mathrm{ch}\varphi \geqslant 1$$

$$[\mathrm{ch}\varphi = 1] \Leftrightarrow [\mathrm{sh}\varphi = 0] \Leftrightarrow [\varphi = 0].$$

2° Admițînd relațiile $\delta = 1$, $t > 2$, să se calculeze A^n demonstrînd existența unui număr real $\varphi > 0$ și a unei matrice Λ independente de n, astfel încît să aibă loc:

$$A^n = (\mathrm{ch}n\varphi)I + (\mathrm{sh}n\varphi)\Lambda,$$

$$\Lambda^2 = I.$$

(Se va arăta mai întîi că t trebuie să fie egal cu $2\mathrm{ch}\varphi$, și că $\mathrm{ch}(-\varphi) = \mathrm{ch}\varphi$).

3° Să se indice o metodă generală care să permită calcularea lui A^n atunci cînd $\delta > 0$.

III. 1° Să se calculeze A^n în funcție de A, de I și de n atunci cînd $\delta = -1$ și $t = 0$ (se va pune, după caz, $n = 2k$ sau $n = 2k + 1$).

2° Admițînd relațiile $\delta = -1$, $t \neq 0$, să se calculeze A^n demonstrînd existența unui număr real φ și a unei matrice Γ, independente de n, astfel încît să aibă loc:

a) pentru $n = 2k$;

$$A^n = (\mathrm{ch}n\varphi)I + (\mathrm{sh}n\varphi)\Gamma;$$

b) pentru $n = 2k + 1$;

$$A^n = (\mathrm{sh}n\varphi)I + (\mathrm{ch}n\varphi)\Gamma,$$

și:

$$\Gamma^2 = I.$$

(Se va arăta, mai înainte, că t trebuie să fie egal cu $2\mathrm{sh}\varphi$).

3° Să se indice o metodă generală care să permită calcularea lui A^n atunci cînd $\delta < 0$.

IV. Ne interesăm de acum înainte de matricele A astfel încît:

$$A^n = I,$$

matricele A^m fiind diferite de I pentru orice valoare întreagă a lui m care satisface inegalitățile $0 < m < n$ (se va spune că A este de ordinul n).

1° Să se determine A și n atunci cînd $\delta = 1$ și $t = 0$.

2° Să se determine A și n atunci cînd $\delta = 1$ și $t = 2$.

3° Să se determine A și n atunci cînd $\delta = 1$ și $t = -2$.

4° Să se demonstreze că inegalitățile $t > 2$ și $t < -2$ sînt imposibile dacă se presupune $\delta = 1$.

5° Admițînd relațiile $0 < \theta < \pi$, $t = 2\cos\theta$, $\delta = 1$, să se demonstreze existența unui număr întreg h, prim cu n, astfel încît să aibă loc:

$$\theta = \frac{2h\pi}{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

V. 1° Să se determine A și n atunci cînd $\delta = -1$ și $t = 0$.

2° Să se demonstreze că neegalitatea $t \neq 0$ este imposibilă, dacă se presupune $\delta = -1$.

VI. 1° Să se arate că studiul precedent permite de a găsi toate matricele A astfel încît să existe un număr întreg n care să fie ordinul lui A.

2° Să se calculeze t și δ în fiecare din următoarele cazuri:

$$n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \quad n = 4,$$

$$n = 5, \quad n = 6, \quad n = 8.$$

3° Să se arate că dacă elementele lui A sînt presupuse numere întregi, n este un divizor al lui 12, diferit de 12.

(*Observație.* Inainte de a trata problema ar fi bine să fie verificată egalitatea matriceală:

$$A^2 = tA - \delta I.$$

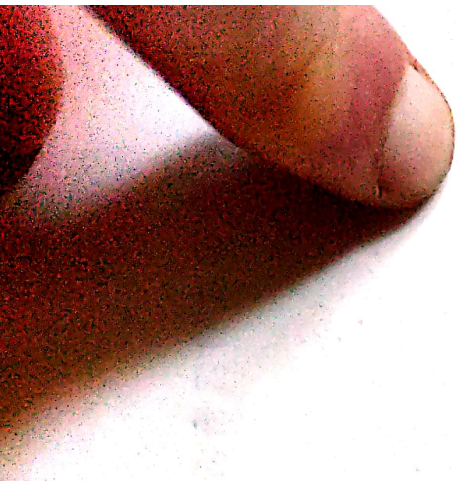
În cazul în care matricea A nu este egală cu nici una dintre matricele λI, în care λ este un număr real, s-ar putea interpreta toate rezultatele din părțile *I* și *III* în termenii coordonatelor matricei A'' relativ la o bază a spațiului vectorial al matricelor combinații liniare de A și de I.)

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Cuvînt înainte 4
1 Spaţiu vectorial al numerelor complexe 6
2 Spaţiu vectorial al polinoamelor 8
3 Spaţiu vectorial al şirurilor numerice 9
4 Matrice şi numere complexe 11
5 Plan vectorial 12
6 Matrice şi izomorfisme 13
7 Matrice. Endomorfisme ale planului vectorial 15
8 Matrice şi produse scalare 16
9 Matrice şi produse scalare 17
10 Proiectori 18
11 Proiectori 19
12 Endomorfisme ale lui $\mathcal{E}_3$ 21
13 Endomorfisme ale lui $\mathcal{E}_3$ 23
14 Endomorfisme şi automorfisme 24
15 Automorfisme ale planului afin 26
16 Plan afin 28
17 Transformări vectoriale. Transformări afine 29
18 Plan vectorial euclidian şi plan afin asociat 31
19 Transformări ortogonale ale unui spaţiu vectorial euclidian şi ale unui spaţiu afin asociat 32
20 Transformări afine ale planului 34
21 O aplicaţie afină 36
22 Rotaţii şi asemănări 37
23 Rotaţii în plan 39
24 Transformări afine în plan şi în spaţiu 41
25 Conuri de revoluţie 44
26 O familie de drepte în planul euclidian 46
27 Geometrie metrică 48
28 Spaţiu vectorial şi spaţiu afin (corpuri finite) 50
29 Cuaternioni 53
30 Puteri de matrice 56

Scanned with OKEN Scanner



Tiraj: 19.500. ex. S. P. 80. ex. legate.
Coli de tipar: 3,75.
Hîrtia: Tipar înalt A 63 gr/m²
Format: 16/70×100.
Bun de tipar: 13. X. 1975.
Nr. plan: 6.046. Ediția 1975.

Întreprinderea Poligrafică Cluj
Municipiul Cluj-Napoca
Str. Brassai Nr. 5—7
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 468/1975

Scanned with OKEN Scanner

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI

Au apărut:

Alef$_0$ *Algebră,*	vol. I, Mulțimi, aplicații, numere reale vol. II, Funcții și ecuații numerice
Alef$_0$, *Geometrie,*	vol. I, Plan afin, plan vectorial vol. II, Geometrie vectorială, geometrie afină vol. III, Geometrie metrică vol. IV, Geometrie în spațiu și geometrie descriptivă
Alef$_0$, *Algebră,*	vol. I, Mulțimi, statistică, probabilități vol. II, Funcții numerice, aplicații diverse
Alef$_0$, *Geometrie,*	vol. I, Spații vectoriale, spații afine vol. II, Geometrie metrică
Alef$_0$, *Algebră,*	Numere întregi
Alef$_0$, *Algebră,*	Numere reale, calcul numeric, numere complexe
Alef$_0$, *Geometrie,*	vol. I, II, Elemente de geometrie afină și euclidiană
Alef$_0$, *Analiză,*	vol. I, Calcul diferențial, aplicații vol. II, Calcul integral, aplicații
Alef$_0$, *Probleme*	

Lei 2,25

Scanned with OKEN Scanner